MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 9 (1971)

ZASTOSOWANIE RÓWNANIA HAMILTONA-JACOBIEGO DO STABILIZACJI UKŁADÓW MECHANICZNYCH

WŁADYSŁAW BOGUSZ (KRAKÓW)

1. Wstęp

Zagadnienie stabilizacji układów mechanicznych wchodzi w zakres optymalnej syntezy układów mechanicznych dyskretnych. W założeniach do przeprowadzenia syntezy przyjmuje się siły działające zgodnie z rzeczywistymi warunkami pracy układu i bada się asymptotyczną stateczność położenia równowagi. W przypadku, gdy nie jest zapewniona asymptotyczna stateczność, poszukuje się dodatkowych sił stabilizujących nie zmieniając pozostałych parametrów układu. Na dodatkowe siły narzuca się warunek optymalizujący, wynikający z procesu, jaki ma realizować układ mechaniczny. Rozwiązanie warunku optymalizującego napotyka trudności i w literaturze spotyka się efektywne rozwiązania otrzymane przy zastosowaniu równań Lapunowa–Bellmana [1]. W metodzie tej przyjmuje się szczególny warunek optymalizujący wynikający z odpowiednio dobranej funkcji Lapunowa.

W pracy przedstawiona jest metoda wykorzystująca własności równania Hamiltona–Jacobiego do rozwiązania warunku sformułowanego ogólnie jako minimalizacja danego funkcjonału. W zastosowaniu tej metody przyjęto jeden z możliwych warunków zapewniających stabilizację układu mechanicznego. Warunek ten sformułowano w taki sposób, aby otrzymać możliwie duży ubytek energii kinetycznej w czasie ruchu. Otrzymane warunki są wystarczające do stabilizacji, ale istnieje możliwość sformułowania innych warunków, ale tak, aby nie były sprzeczne z założeniami przyjętymi w opisanej metodzie. Podstawowym założeniem w metodzie, które zapewnia istnienie rozwiązania stabilizacji, jest aby minimalizacja funkcjonału poprzez równania Eulera–Lagrange'a prowadziła do równań ruchu rozważanego układu mechanicznego.

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy układ holonomiczny, którego ruch jest opisany równaniami:

$$(2.1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i(t, q_1 q_n, \varphi), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie E jest energią kinetyczną, Q_i przedstawia siły uogólnione zaś φ jest funkcją określającą dodatkowe siły, które należy wyznaczyć z narzuconego warunku na ruch układu.

Zakładamy, że układ (2.1) posiada rozwiązanie zerowe niestateczne dla $\varphi = 0$ lub stateczne, ale nie asymptotycznie stateczne.

Zagadnienie stabilizacji układu (2.1) polega na wyznaczaniu funkcji φ takiej, aby rozwiązanie zerowe było asymptotycznie stateczne i dany funkcjonał J

$$J = \int_0^\infty L(t, q_1, q_2, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)\,dt \tag{2.2}$$

przyjmował wzdłuż rozwiązań układu (2.1) wartość minimum.

Ograniczając się do lokalnej asymptotycznej stateczności można powyższe zagadnienie rozwiązać, rozważając równania w perturbacjach i linearyzując funkcję φ.

Rozwiążemy powyższe zagadnienie wykorzystując równanie Hamiltona-Jacobiego[1].

3. Metoda stabilizacji

Podamy metodę doboru sił stabilizujących w oparciu o równanie Hamiltona-Jacobiego. Weźmy pod uwagę funkcję $L(t, x^i, \dot{x}^i)$ określoną w pewnym obszarze $G \subset R_{2n+1}$, posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego względem wszystkich argumentów. Funkcję $L(t, x^i, \dot{x}^i)$ nazywamy lagrangianem. Funkcję $H(t, x^i, p_i)$ odpowiadającą funkcji L według równania:

$$H(t, x^i, p_i) = -L(t, x^i, \dot{x}^i) + p_i \dot{x}^i \tag{3.1}$$

nazywamy hamiltonianem.

W funkcji (3.1) p_i są określone wzorami

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}. \tag{3.2}$$

Zakładamy, że równania (3.2) dadzą się rozwiązać względem $\dot{x}^i$

$$\dot{x}^i = \Phi_i(t, x^i, p_i). \tag{3.3}$$

Po podstawieniu (3.3) do (3.1) otrzymamy funkcję H zmiennych (t, x^i, p_i)

Weźmy pod uwagę rodzinę trajektorii w przestrzeni R_{n+1}, przechodzących przez dwa bliskie punkty $P_1(t, x^i)$, $P_2(t+\Delta t, x^i+\Delta x^i)$. Wzdłuż tych trajektorii możemy zdefiniować lagrangian L i utworzyć funkcjonał:

$$J = \int_{P_1}^{P_2} L(t, x^i, \dot{x}^i)\,dt. \tag{3.4}$$

Niech w przestrzeni R_{n+1} będzie dana rodzina powierzchni klasy C^2

$$S(t, x^i) = c, \tag{3.5}$$

taka, że pokrywa pewien obszar $G_0 \subset R_{n+1}$ i przez każdy punkt obszaru przechodzi tylko jedna powierzchnia. Na trajektorie przechodzące przez punkty P_1, P_2 leżące w obszarze G_0

[1] W dalszej pracy przyjmujemy następującą umowę. Wielkości wektorowe oznaczamy wskaźnikiem u góry np. x^i, zaś wielkości skalarowe wskaźnikiem u dołu np. a_i. Wskaźnik u góry i u dołu oznacza sumowanie np. $a_i x^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ lub $a_{ij} x^j$ sumowanie po $j = 1, 2, \ldots, n$, $a_{ij} x^i x^j$ sumowanie po i i po j.

narzucimy warunek, aby przecinały powierzchnie (3.5) i nie były do żadnej z nich styczne oraz aby przy przejściu od punktu P_1 leżącego na jednej powierzchni do punktu P_2 leżącego na drugiej, przyrost funkcjonału (3.4) był minimum. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby ten warunek był spełniony jest, aby funkcja $S(t, x^i)$ była rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t, x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i}\right)=0 \tag{3.6}$$

oraz

$$\frac{\partial S}{\partial x^i}=p_i, \tag{3.7}$$

gdzie H jest hamiltonianem odpowiadającym lagrangianowi zdefiniowanemu wzdłuż trajektorii przechodzących przez punkty P_1, P_2.

Własności powierzchni (3.5) i równania (3.6) wykorzystamy do wyznaczania sił stabilizujących ruch niestabilny układu dyskretnego.

Rozważymy zagadnienie przedstawione w punkcie 2.

Ogólna metoda rozwiązania tego zagadnienia jest następująca. Funkcję pod całką (2.2) rozpatrujemy jako lagrangian równania (2.1). Warunkiem koniecznym minimalizacji funkcjonału (2.2) jest, aby spełnione były równania Eulera–Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^i}=0. \tag{3.8}$$

Dla funkcji L wyznaczamy hamiltonian i piszemy równanie Hamiltona–Jacobiego (3.6). Do równania (3.6) podstawimy funkcję $S(t, x^i)$ takiej postaci, aby trajektorie przecinające powierzchnie $S(t, x^i) = c$ dążyły do punktu (0, 0), gdy t dąży do nieskończoności. Na szukaną funkcję φ otrzymujemy następujące warunki.

Rozwiązania równań (3.8) i (2.1) przy tych samych warunkach początkowych muszą być identyczne oraz muszą spełniać równanie (3.6) przy odpowiednio dobranej funkcji $S(t, x^i)$. Spełnienie równania (3.6) zapewnia asymptotyczną stateczność tych rozwiązań.

Ograniczając się do lokalnej stateczności położenia równowagi rozważać będziemy układy, których energia kinetyczna wyraża się wzorem: $E = a_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$, a funkcje Q_i są w otoczeniu położenia równowagi zlinearyzowane i nie zależą od czasu. Równania (2.2) w tym przypadku mają postać

$$(a_{ij}+a_{ji})\ddot{x}^j = k_{ij}x^j+b_{ij}x^j+c_{ij}\dot{x}^j. \tag{3.9}$$

Macierz $(a_{ij}+a_{ji})$ jest określona dodatnia, macierz (k_{ij}) jest znana, zaś macierze (b_{ij}) i (c_{ij}) należy tak wyznaczyć, aby położenie równowagi było asymptotycznie stateczne.

Funkcję $L(t, x^i, \dot{x}^i)$ funkcjonału (2.2) przyjmiemy w takiej postaci, aby spełnione były następujące warunki:

1) dla dowolnych $t_1 < t_2$, $\left[\frac{dE}{dt}\right]_{t=t_1} \leqslant \left[\frac{dE}{dt}\right]_{t=t_2} \leqslant 0$.

2) $\left[\ln\left|\frac{dE}{dt}\right|_{t=t_1} - \ln\left|\frac{dE}{dt}\right|\right]_{t=t_2} \leqslant \lambda t_2$; λ dodatnia stała.

Warunek 1) zapewnia zanikanie ruchu, zaś warunek 2) zanikanie energii kinetycznej w sposób wykładniczy. Chodzi więc o stabilizację układu mechanicznego bez oscylacji energii kinetycznej.

Z warunku 2) otrzymamy

$$\left|\left[\frac{dE}{dt}\right]_{t=t_1}\right| \leqslant \left|\left[\frac{dE}{dt}\right]_{t=t_2}\right| e^{\lambda t_2}$$

i funkcję $L(t, x^i, \dot{x}^i)$ przyjmujemy w postaci $L = \frac{dE}{dt} e^{\lambda t}$.

Dla układu (3.9) funkcja $L(t, x^i, \dot{x}^i)$ ma postać

$$L(t, x^i, \dot{x}^i) = e^{\lambda t}\left[B_{ij}x^j + \frac{1}{2} c_{ij}\dot{x}^j\right]\dot{x}^i, \tag{3.10}$$

gdzie: $B_{ij} = k_{ij}+b_{ij}$, zaś λ jest parametrem, który należy wyznaczyć. Siły tłumienia przyjmujemy w postaci funkcji dysypacji energii Rayleigha; macierz $(-c_{ij})$ jest określona dodatnia.

Podstawimy funkcję (3.10) do równań (3.8)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = e^{\lambda t}\left[B_{ij}x^j + \frac{1}{2}(c_{ij}+c_{ji})\dot{x}^j\right], \tag{3.11}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = e^{\lambda t} B_{ij}\dot{x}^j.$$

Równania (3.8) otrzymamy w postaci

$$\frac{1}{2}(c_{ij}+c_{ji})\ddot{x}^j = -\lambda B_{ij}x^j - \frac{\lambda}{2}[c_{ij}+c_{ji}]\dot{x}^j - (B_{ij}-B_{ji})\dot{x}^j. \tag{3.12}$$

Porównując współczynniki równań (3.12) i (3.9) otrzymamy:

$$\begin{aligned} c_{ij}+c_{ji} &= -2\lambda(a_{ij}+a_{ji}), \\ \lambda(c_{ij}-c_{ji}) &= 2(B_{ij}-B_{ji}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Z otrzymanych wzorów (3.13) wynika, że funkcja dysypacji energii jest proporcjonalna do energii kinetycznej układu.

$$\frac{1}{2} c_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = -\lambda a_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j. \tag{3.14}$$

Równania algebraiczne konieczne do wyznaczenia macierzy otrzymamy z równania Hamiltona-Jacobiego.

Chcąc otrzymać hamiltonian należy rozwiązać równania:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = p_i. \tag{3.15}$$

Korzystając z (3.11) i (3.13) można równania (3.15) napisać w postaci

$$-\lambda(a_{ij}+a_{ji})\dot{x}^j + B_{ij}x^j = p_i e^{-\lambda t}. \tag{3.16}$$

Funkcję $S(t, x^i)$, która ma być rozwiązaniem równania (3.6) przyjmujemy w takiej postaci, aby odległości punktów na powierzchniach (3.5) od początku układu dążyły do zera, gdy czas dąży do nieskończoności

$$S(t, x^i) = \frac{1}{2} e^{\lambda t} D_{ij} x^i x^j, \tag{3.17}$$

gdzie macierz (D_{ij}) przyjmiemy proporcjonalną do macierzy (B_{ij}). Przy takim przyjęciu funkcji $S(t, x^i)$ powierzchnie (3.5) są określone równaniem

$$D_{ij} x^i x^j = 2ce^{-\lambda t}, \tag{3.18}$$

gdzie c jest dowolną stałą.

Ze wzoru (3.18) wynika, że odległości punktów na tych powierzchniach dążą do zera, gdy parametr λ jest dodatni. Z (3.7) i (3.17) otrzymamy

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} = \frac{1}{2} e^{\lambda t}(D_{ij}+D_{ji})x^j. \tag{3.19}$$

Po podstawieniu (3.19) do (3.16) otrzymamy układ równań

$$(a_{ij}+a_{ji})\dot{x}^j = \frac{1}{\lambda}\left[B_{ij} - \frac{1}{2}(D_{ij}+D_{ji})\right]x^j. \tag{3.20}$$

Przy przyjętym założeniu odnośnie macierzy $(a_{ij}+a_{ji})$ układ równań (3.20) można rozwiązać. Rozwiązanie przedstawimy wzorem

$$\dot{x}^j = A^j_i x^i. \tag{3.21}$$

Hamiltonian (3.1) obliczymy z (3.10) i(3.16)

$$H(t, x^i, p_i) = -\lambda e^{\lambda t} D_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j, \tag{3.22}$$

gdzie za $\dot{x}^i$, $\dot{x}^j$ należy podstawić (3.21).

Równanie Hamiltona–Jacobiego (3.6) przy podstawieniu (3.17) i (3.22) napiszemy w postaci

$$D_{ij} x^i x^j - 2\lambda a_{ij} A^i_\alpha x^\alpha A^j_\beta x^\beta = 0. \tag{3.23}$$

Przyrównując współczynniki przy x^i, x^j do zera otrzymamy układ równań algebraicznych

$$\frac{1}{2}(D_{ij}+D_{ji}) - (a_{\alpha\beta}+a_{\beta\alpha}) A^\alpha_i A^\beta_j = 0. \tag{3.24}$$

Układ (3.24) przedstawia $\frac{n^2+n}{2}$ równań algebraicznych, w którym występuje $2n^2$ niewiadomych A^j_i i D_{ij}.

Dodatkowe równania otrzymamy z (3.20) po podstawieniu (3.21) i porównaniu współczynników przy x^i

$$\lambda(a_{j\alpha}+a_{\alpha j}) A^\alpha_i = B_{ji} - \frac{1}{2}(D_{ji}+D_{ij}). \tag{3.25}$$

Jest to układ n^2 równań. W ten sposób z układów (3.24) i (3.25) otrzymujemy $\frac{3n^2+n}{2}$ równań algebraicznych o niewiadomych A^j_i, D_{ij}, B_{ij}, λ, których liczba wynosi: $(3n^2+1)$.

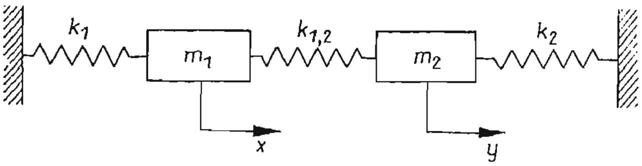
Ponieważ macierz (D_{ij}) musi być określona dodatnia otrzymujemy dodatkowo n warunków do wyznaczenia niewiadomych. Również macierz sprężystości $(-B_{ij})$ musi być określona dodatnia i razem z układami (3.24) i (3.25) otrzymujemy $\frac{3n^2+5n}{2}$ warunków do wyznaczenia $(3n^2+1)$ niewiadomych. Jeżeli macierz sprężystości przyjmiemy symetryczną, otrzymamy $B_{ij} = B_{ji}$ i liczba niewiadomych będzie wynosiła $3n^2+1-\frac{n^2-n}{2} = \frac{5n^2+n+2}{2}$.

Oznaczymy liczbę niewiadomych przez N, a liczbę warunków do wyznaczenia niewiadomych przez R. Z przeprowadzonych obliczeń otrzymamy

$$N-R = \frac{5n^2+n+2}{2} - \frac{3n^2+5n}{2} = (n-1)^2. \tag{3.26}$$

Z (3.26) wynika, że tylko dla $n = 1$ liczba niewiadomych jest równa liczbie warunków, zaś dla $n > 1$ liczba niewiadomych jest większa od liczby warunków i zależnie od rozważanego układu można przyjąć dodatkowo pewne niewiadome jako znane. Celowe jest w tych przypadkach przyjmowanie macierzy (D_{ij}) proporcjonalnej do macierzy $(-B_{ij})$, gdyż przy takim przyjęciu powierzchnie (3.5) będą styczne do powierzchni ekwipotencjalnych i trajektorie układu (3.9) będą je przecinać i nie będą styczne, czyli na powierzchniach (3.5) nie będzie punktów poślizgu.

Sposób postępowania objaśnimy na przykładzie. Weźmy pod uwagę układ przedstawiony na rys. 1. Położenie równowagi układu jest stateczne, ale nie asymptotycznie sta-



Rys. 1

teczne i należy wyznaczyć siły tłumienia wiskotycznego tak, aby ustabilizować asymptotycznie układ przy minimalizacji funkcjonału (2.2) z funkcją podcałkową (3.10). Współczynniki tłumienia wiskotycznego oznaczymy odpowiednio przez $2h_1$, $2h_{1,2}$, $2h_2$. Równania ruchu mają postać:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} &= -(k_1+k_{1,2})x+k_{1,2}y-2(h_1+h_{1,2})\dot{x}+2h_{1,2}\dot{y}, \\ m_2\ddot{y} &= k_{1,2}x-(k_2+k_{1,2})y+2h_{1,2}\dot{x}-2(h_2+h_{1,2})\dot{y}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Na podstawie (3.13) otrzymamy

$$\begin{aligned} 2(h_1+h_{1,2}) &= \lambda m_1, \\ 2(h_2+h_{1,2}) &= \lambda m_2, \\ 2h_{12} &= 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ponieważ $h_{12} = 0$, więc do stabilizacji układu wystarczą dwa tłumiki działające na masy m_1 i m_2 i nie potrzeba tłumika między masami m_1 i m_2. Współczynnik λ obliczymy rozwiązując układ (3.24) i (3.25).

Przyjmiemy $D_{12} = D_{21}$. Układ równań (3.25) ma postać

$$
\begin{aligned}
2\lambda m_1 A_1^1 &= B_{11}-D_{11},\\
2\lambda m_2 A_1^2 &= B_{21}-D_{21},\\
2\lambda m_1 A_2^1 &= B_{21}-D_{21},\\
2\lambda m_2 A_2^2 &= B_{22}-D_{22}.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Po obliczeniu A_i^j i podstawieniu do (3.24) lub do (3.27) otrzymamy układ równań:

$$
\begin{aligned}
D_{11} &= \frac{(B_{11}-D_{11})^2}{2\lambda^2 m_1}+\frac{(B_{21}-D_{21})^2}{2\lambda^2 m_2},\\
D_{12} &= \frac{B_{21}-D_{21}}{2\lambda^2}\left[\frac{B_{11}-D_{11}}{m_1}+\frac{B_{22}-D_{22}}{m_2}\right],\\
D_{22} &= \frac{(B_{21}-D_{21})^2}{2\lambda^2 m_1}+\frac{(B_{22}-D_{22})^2}{2\lambda^2 m_2}.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Celem uproszczenia zapisu wprowadzimy oznaczenia:

$$
\frac{B_{11}}{m_1} = b_1, \quad \frac{B_{12}}{\sqrt{m_1 m_2}} = b_{12}, \quad \frac{B_{22}}{m_2} = b_2, \quad \frac{D_{11}}{m_1} = d_1, \quad \frac{D_{12}}{\sqrt{m_1 m_2}} = d_{12}
$$
$$
\frac{D_{22}}{m_2} = d_2.
\tag{3.31}
$$

Układ równań (3.30) przy tych oznaczeniach ma postać:

$$
\begin{aligned}
2\lambda^2 d_1 &= (b_1-d_1)^2+(b_{21}-d_{21})^2,\\
2\lambda^2 d_{12} &= (b_{21}-d_{12})[b_1-d_1+b_2-d_2],\\
2\lambda^2 d_2 &= (b_2-d_2)^2+(b_{21}-d_{12})^2.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

W równaniach (3.32) występują cztery niewiadome: d_1, d_2, d_{12}, λ^2, jeżeli przyjmujemy b_1, b_2 i b_{12} jako ustalone. Można również sformułować zagadnienie w ten sposób, że przyjmujemy d_1, d_2, d_{12}, określające powierzchnię, którą rozwiązania mają przecinać bez poślizgu i wyznaczyć b_1, b_2, b_{12} i λ^2.

Przytoczymy tok obliczeń w przypadku, gdy nie zmieniamy sił sprężystych, tj. b_1, b_2, b_{12}, a dobieramy tylko tłumienie, tj. należy obliczyć λ^2. Przyjmiemy jedną niewiadomą $d_{1,2}$ równą $-b_{12}$. Przy takim przyjęciu z drugiego równania (3.32) otrzymamy

$$
\lambda^2 = d_1-b_1+d_2-b_2.
\tag{3.33}
$$

Jeżeli odejmiemy równania pierwsze i trzecie (3.32) otrzymamy

$$
2\lambda^2(d_1-d_2) = [b_2+b_1-d_1-d_2][b_1-b_2+d_2-d_1].
\tag{3.34}
$$

Po podstawieniu (3.33) do (3.34) i uproszczeniu otrzymamy

$$
d_1-d_2 = b_2-b_1.
\tag{3.35}
$$

Rozwiązując (3.33) i (3.35) obliczymy d_1 i d_2

$$
d_1 = b_2+\frac{1}{2}\lambda^2, \quad d_2 = b_1+\frac{1}{2}\lambda^2.
\tag{3.36}
$$

Po podstawieniu (3.36) do pierwszego lub trzeciego równania (3.32) otrzymamy takie same równanie na λ^2

$$\frac{3}{4}\lambda^4+\lambda^2(b_1+b_2)-(b_1-b_2)^2-4b_{12}^2=0. \tag{3.37}$$

Równanie (3.37) posiada dwa pierwiastki, z których jeden dodatni jest rozwiązaniem postawionego zagadnienia

$$\lambda^2=\frac{2}{3}\left[-(b_1+b_2)+2\sqrt{b_1^2+b_2^2-b_1b_2+3b_{12}^2}\right]. \tag{3.38}$$

Łatwo sprawdzić, że po podstawieniu (3.38) do (3.36) otrzymamy: $d_1>0$, $d_2>0$ i $d_1d_2-d_{12}^2>0$, co oznacza, że powierzchnia określona przez d_1, d_2, d_{12} jest formą kwadratową jednorodną dodatnią.

Powracając do oznaczeń (3.36) otrzymamy na λ wyrażenie:

$$\lambda=\sqrt{\frac{2}{3}\left[\sqrt{\frac{k_1+k_{12}}{m_1}+\frac{k_2+k_{12}}{m_2}+\sqrt{\left(\frac{k_1+k_{12}}{m_1}-\frac{k_2+k_{12}}{m_2}\right)^2+\frac{(k_1+k_{12})(k_1+k_{12})}{m_1m_2}+\frac{3k_{12}^2}{m_1m_2}}}\,\right]}. \tag{3.39}$$

Po podstawieniu (3.39) do (3.28) otrzymamy współczynniki h_1 i h_2.

Jakiego rodzaju jest tłumienie określone wzorami (3.28) można zbadać podstawiając współczynniki tłumienia do równań (3.27). Jeżeli przyjmiemy dla przykładu $m_1=m_2=$ $=m$, $k_1=k_2=k_{12}=k$ z (3.38) otrzymamy: $\lambda^2=\frac{4k}{3m}(2+\sqrt{7})$ i tłumienie obliczone według wzorów (3.28) jest nadkrytyczne. Ruch układu jest bezoscylacyjny.

Literatura cytowana w tekście

1. М. С. Габриелиан, Н. Н. Красовский, *К задаче о стабилизации механической системы*, Прик. Мат. Мех., т. 28, b. 5, 1964.
2. М. С. Габриелиан, *О стабилизации неустойчивых движений механических систем*, Прик. Мат. Мех., т. 28, b. 3, 1964.
3. Н. Н. Красовский, *О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи*, Прик. Мат. Мех., т. 27, b. 4, 1963.
4. Е. Г. Альбрехт, *Об оптимальной стабилизации нелинейных систем*, Прик. Мат. Мех., т. 25, b. 5, 1961.
5. Е. А. Гальперин, Н. Н. Красовский, *О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем*, Прик. Мат. Мех., т. 27, b. 6, 1963.
6. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, 1961.
7. H. Rund, *The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations*, New York 1966.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе дан метод стабилизации механических систем. Метод основан на использовании уравнения Гамильтона-Якоби для определения сил, приложение которых к системе обеспечивает асимптотическую стабильность состояния равновесия. Подбор этих сил обусловлен минимализацией заданного функционала. Условия минимализации получены из уравнений Эйлера-Лагранжа. Описанный метод применен в случае, когда условием оптимализации является производная кинетической энергии системы. Способ вычислений иллюстрирован примером.

Summary

APPLICATION OF HAMILTON-JACOBI EQUATION FOR STABILIZATION OF MECHANICAL SYSTEMS

The method of stabilization of mechanical systems is presented in the paper. The method consists in using the Hamilton-Jacobi equation for the proper selection of such forces which, when applied to the system, ensure the asymptotic stability of the equilibrium position. This selection follows from the minimalization condition of the given functional. The minimalization conditions are obtained from the Euler-Lagrange equations. The method described is applied to the case when the optimization condition is the derivative of the kinetic energy of the system. This procedure is explained in an example.

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lutego 1970 r. — powtórnie dnia 25 listopada 1970 r.