

DRGANIA BELKI NA INERCYJNYM PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM

ZBIGNIEW ONISZCZUK

Politechnika Rzeszowska

W pracy rozpatrzono swobodne i wymuszone drgania poprzeczne belki znajdującej się na inercyjnej warstwie sprężystej. Warstwę sprężystą zamodelowano zespołem niezależnych prętów sprężystych. Belkę poddano działaniu dowolnego obciążenia rozłożonego w sposób ciągły. Ruch układu opisano dwoma różniczkowymi równaniami cząstkowymi. Drgania swobodne określono stosując metodę Bernoulliego-Fouriera, drgania wymuszone znaleziono metodą rozwinięcia w szereg według układu postaci drgań własnych.

W formie przykładu rozwiązano belkę swobodnie podpartą obciążoną w środku siłą harmoniczną. Rezultaty porównano z dwoma szczególnymi przypadkami układu.

1. Wprowadzenie

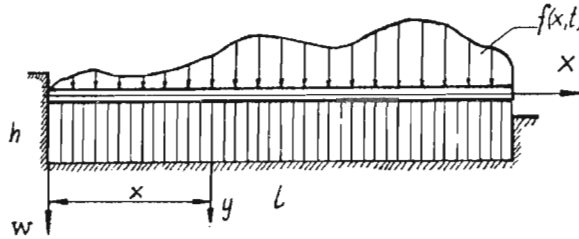
Problem drgań belki na podłożu sprężystym ma istotne znaczenie praktyczne. Zagadnienie to było rozważane przez wielu autorów, większość których przyjmowała najprostszą wersję nieważkiego, ciągłego podłoża typu Winklera. Model ten jest dopuszczalny w przypadku miękkiego i lekkiego podłoża [1,2]. Saito zaproponował ogólniejszy model sprężystego podłoża, który umożliwia uwzględnienie wpływu jego masy na drgania belki. Inercyjne podłoże przedstawia się w formie zespołu prętów sprężystych, których wzajemne oddziaływanie pomija się. Model ten wykorzystano przy analizie drgań belki pojedynczej w pracach [2,7,8] oraz zastosowano w układach dwóch belek połączonych sprężystością [1,5,6,7].

W niniejszej pracy przedstawimy pełną analizę nietłumionych, swobodnych i wymuszonych ogólnym obciążeniem drgań belki znajdującej się na inercyjnej warstwie sprężystej.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrujemy drgania smukłej, jednorodnej, pryzmatycznej belki spoczywającej na inercyjnej warstwie sprężystej (rys.1), którą traktujemy jako zespół nie-

zależnych prętów sprężystych [2,8]. Pręty wykonują podłużne drgania wywołane poprzecznymi przemieszczeniami przekrojów belki.



Rys. 1.

Oznaczenia dotyczące belki:

- $w = w(x, t)$ - przemieszczenia przekrojów,
 $f = f(x, t)$ - obciążenie wymuszające,
 $p = p(x, t)$ - reakcje jednostkowe prętów na belkę,
 x - współrzędna przestrzenna,
 t - czas,
 l - długość,
 F, J - przekrój poprzeczny i moment bezwładności,
 ρ, E - masa właściwa i moduł Younga.

Oznaczenia dotyczące pręta sprężystego:

- $u = u(x, y, t)$ - przemieszczenia przekrojów,
 y - współrzędna położenia przekroju,
 b, h - szerokość i wysokość,
 ρ_0, E_0 - masa właściwa i moduł Younga,
 $k_0 = E_0 b/h$ - współczynnik sprężystości.

Różniczkowe równania ruchu (zgodnie z teorią Bernoulliego-Euiera) układu ma postać następującą [2,5,8]:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p = f, \quad (2.1)$$

$$E_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad p = k_0 h \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,0,t)}. \quad (2.2)$$

Dla równania (2.2) mamy geometryczne warunki brzegowe:

$$u(x, 0, t) = w(x, t), \quad u(x, h, t) = 0. \quad (2.3)$$

W celu zachowania ogólności rozwiązań nie będziemy precyzować warunków brzegowych dla belki, zastrzegając jedynie brak mas skupionych. Warunki początkowe przyjmujemy w ogólnej formie:

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{(x,0)} = v_0(x), \quad (2.4)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \left(1 - \frac{y}{h}\right)w_0(x), \quad (2.5)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(x,y,0)} = s_0(x, y) = \left(1 - \frac{y}{h}\right)v_0(x).$$

3. Drgania swobodne

Drgania swobodne belki określamy jako rozwiązania ogólne jednorodnego układu równań (2.1) i (2.2). Stosując metodę Bernoulliego-Fouriera przewidujemy drgania harmoniczne układu w postaci:

$$w(x, t) = X(x)T(t), \quad u(x, y, t) = U(x, y)T(t), \quad (3.1)$$

gdzie:

$$T(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad (3.2)$$

przy czym ω jest nieznaną częstością drgań własnych.

Podstawiając (3.1), (3.2) do (2.1), (2.2), (2.3) mamy:

$$X^{IV} - \frac{1}{EJ} \left[\rho F \omega^2 + k_0 h \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{(x,0)} \right] X = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a^2 U = 0, \quad a^2 = \frac{\rho_0}{E_0} \omega^2, \quad (3.4)$$

$$U(x, 0) = X(x), \quad U(x, h) = 0. \quad (3.5)$$

Rozwiązanie równania (3.4):

$$U(x, y) = C(x) \sin(ay) + D(x) \cos(ay), \quad (3.6)$$

po uwzględnieniu (3.5) ma postać:

$$U(x, y) = X(x) [\cos(ay) - \operatorname{ctg}(ah) \sin(ay)]. \quad (3.7)$$

Wprowadzając (3.7) do (3.3) otrzymujemy następujące równanie określające postacie drgań swobodnych belki:

$$X^{IV} - \frac{1}{EJ} \left\{ \rho F \omega^2 - k_0 h \left(\frac{\rho_0}{E_0} \right)^{\frac{1}{2}} \omega \operatorname{ctg} \left[\omega \left(\frac{\rho_0}{E_0} \right)^{\frac{1}{2}} h \right] \right\} X = 0, \quad (3.8)$$

lub

$$X^{IV} - k^4 X = 0, \quad (3.9)$$

gdzie:

$$k^4 = \frac{1}{EJ} \left\{ \rho F \omega^2 - k_0 h \left(\frac{\rho_0}{E_0} \right)^{\frac{1}{2}} \omega \operatorname{ctg} \left[\omega \left(\frac{\rho_0}{E_0} \right)^{\frac{1}{2}} h \right] \right\}. \quad (3.10)$$

Ogólnym rozwiązaniem równania (3.9) jest wyrażenie:

$$X(x) = A_1 \sinh(kx) + A_2 \cosh(kx) + A_3 \sin(kx) + A_4 \cos(kx). \quad (3.11)$$

Stałe A_i wyznaczamy podstawiając (3.11) do przyjętych warunków brzegowych. Przekształcając jednorodny układ czterech równań algebraicznych otrzymamy równanie, z którego wyznaczymy nieskończony ciąg częstości ω_n , a następnie określamy odpowiadające im współczynniki k_n i a_n , postacie drgań X_n i U_n oraz funkcje czasu T_n .

Rozwiązania (3.1), (3.2) możemy przedstawić w formie:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)] \times \\ &\times [A_{1n} \sinh(k_n x) + A_{2n} \cosh(k_n x) + A_{3n} \sin(k_n x) + A_{4n} \cos(k_n x)], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, y) T_n(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(a_n y) - \operatorname{ctg}(a_n h) \sin(a_n y)] X_n(x) T_n(t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} T_n(t) &= A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t), \\ X_n(x) &= A_{1n} \sinh(k_n x) + A_{2n} \cosh(k_n x) + A_{3n} \sin(k_n x) + A_{4n} \cos(k_n x), \\ U_n(x, y) &= [\cos(a_n y) - \operatorname{ctg}(a_n h) \sin(a_n y)] X_n(x), \\ k_n^4 &= \frac{1}{EJ} \left\{ \rho F \omega_n^2 - k_0 h \left(\frac{\rho_0}{E_0} \right)^{\frac{1}{2}} \omega_n \operatorname{ctg} \left[\omega_n \left(\frac{\rho_0}{E_0} \right)^{\frac{1}{2}} h \right] \right\}, \\ a_n^2 &= \frac{\rho_0}{E_0} \omega_n^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nieznane stałe A_n , B_n wyznaczamy na podstawie warunków początkowych wykorzystując warunek ortogonalności postaci drgań. Warunek ten tworzymy w oparciu o równania (3.4) i (3.9). Postacie drgań X_i , X_j oraz U_i , U_j spełniają:

$$X_n^{IV} - k_n^4 X_n = 0, \quad \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + a_n^2 U_n = 0, \quad n = i, j,$$

skąd po wykonaniu odpowiednich transformacji całkowych uzyskujemy związki:

$$(k_i^4 - k_j^4) \int_0^l X_i X_j dx = 0,$$

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \rho_0 b \int_0^h U_i U_j dy = (g_i - g_j) X_i X_j,$$

$$g_n = k_0 a_n h \operatorname{ctg}(a_n h).$$

Łącząc je otrzymujemy zależność:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^l \left[\rho F X_i X_j + \rho_0 b \int_0^h U_i U_j dy \right] dx = 0,$$

która prowadzi do następującego warunku ortogonalności:

$$\int_0^l \left[\rho F X_i X_j + \rho_0 b \int_0^h U_i U_j dy \right] dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ b_i^2 & \text{dla } i = j \end{cases}, \quad (3.15)$$

gdzie:

$$b_i^2 = \int_0^l \left[\rho F X_i^2 + \rho_0 b \int_0^h U_i^2 dy \right] dx.$$

Wprowadzamy (3.12), (3.13) do warunków początkowych (2.4), (2.5):

$$\begin{aligned} w_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x), & v_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n X_n(x), \\ u_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n U_n(x, y), & s_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n U_n(x, y). \end{aligned}$$

Dokonując odpowiednich przekształceń i wykorzystując warunek ortogonalności (3.15) otrzymujemy wzory na poszukiwane stałe:

$$A_n = \frac{1}{\omega_n b_n^2} \int_0^l \left(\rho F v_0 X_n + \rho_0 b \int_0^h s_0 U_n dy \right) dx,$$

$$B_n = \frac{1}{b_n^2} \int_0^l (\rho F w_0 X_n + \rho_0 b \int_0^h u_0 U_n dy) dx.$$

Podstawiając u_0, v_0 z (2.5) ostatecznie mamy:

$$A_n = \frac{1}{\omega_n b_n^2} \left[\rho F + \frac{\rho_0 b}{a_n} \left(\frac{1}{a_n h} - \operatorname{ctg}(a_n h) \right) \right] \int_0^l v_0 X_n dx, \quad (3.16)$$

$$B_n = \frac{1}{b_n^2} \left[\rho F + \frac{\rho_0 b}{a_n} \left(\frac{1}{a_n h} - \operatorname{ctg}(a_n h) \right) \right] \int_0^l w_0 X_n dx,$$

gdzie:

$$b_n^2 = \left\{ \rho F + \frac{1}{2} \rho_0 b h [\operatorname{cosec}^2(a_n h) - (a_n h)^{-1} \operatorname{ctg}(a_n h)] \right\} \int_0^l X_n^2 dx.$$

4. Drgania wymuszone

Rozpatrzmy drgania wywołane dowolnym obciążeniem nieinercyjnym rozłożonym w sposób ciągły wzdłuż belki. Drgania wymuszone wyznaczmy znajdując rozwiązania szczególne niejednorodnego układu równań (2.1), (2.2). W tym celu zastosujemy metodę rozwinięcia w szereg według układu postaci drgań własnych [3,5,9].

Rozwiązania przedstawiamy w formie:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) S_n(t), \quad u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, y) S_n(t), \quad (4.1)$$

gdzie:

$S_n(t)$ – funkcje czasu podlegające określeniu,

$X_n(x), U_n(x, y)$ – postaci drgań swobodnych.

Podstawiając (4.1) do (2.1), (2.2) mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \tilde{S}_n \rho F X_n + S_n \left[E J X_n^{IV} - k_0 h \frac{\partial U_n}{\partial y} \Big|_{(x,0)} \right] \right\} = f, \quad (4.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \tilde{S}_n \rho_0 U_n - S_n E_0 \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} \right\} = 0.$$

Ponieważ z (3.3),(3.4) wynika, że:

$$EJX_n^{IV} - k_0h \frac{\partial U_n}{\partial y} \Big|_{(x,0)} = \omega_n^2 \rho F X_n, \quad E_0 \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} = -\omega_n^2 \rho_0 U_n,$$

więc z (4.2) otrzymujemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\bar{S}_n + \omega_n^2 S_n] \rho F X_n = f, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{S}_n + \omega_n^2 S_n] \rho_0 U_n = 0.$$

Równania te mnożymy w kolejności odpowiednio przez X_k i bU_k , całkując przy tym drugie równanie względem y w przedziale $(0, h)$, a następnie uzyskane zależności sumujemy i całkujemy z kolei względem x w przedziale $(0, l)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{S}_n + \omega_n^2 S_n) \int_0^l [\rho F X_k X_n + \rho_0 b \int_0^h U_k U_n dy] dx = \int_0^l f X_k dx.$$

Na mocy warunku ortogonalności (3.15) otrzymujemy ciąg równań różniczkowych:

$$\bar{S}_n + \omega_n^2 S_n = \frac{1}{b_n^2} \int_0^l f(x, t) X_n(x) dx,$$

których rozwiązania przy zerowych warunkach początkowych $S_n(0) = \dot{S}_n|_{(0)} = 0$ są określone całkami:

$$S_n(t) = \frac{1}{\omega_n b_n^2} \int_0^t \int_0^l f(x, s) X_n(x) dx \sin[\omega_n(t-s)] ds. \quad (4.3)$$

Drgania wymuszone belki opisuje wyrażenie:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n b_n^2} X_n(x) \int_0^t \int_0^l f(x, s) X_n(x) dx \sin[\omega_n(t-s)] ds,$$

a drgania podłużne prętów warstwy sprężystej wyrażenie:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n b_n^2} U_n(x, y) \int_0^t \int_0^l f(x, s) X_n(x) dx \sin[\omega_n(t-s)] ds.$$

5. Podsumowanie

W pracy rozważono układ, który umożliwia uwzględnienie wpływu masy podłoża na drgania belki. Model nieważkiego podłoża Winklera, którego podstawową zaletą jest prostota, dostatecznie przybliży rzeczywiste podłożę tylko w przypadku lekkiego i miękkiego podłoża oraz przy niskich częstościach drgań belki [1,2]. Inercyjne podłożę przedstawione jako zespół niezależnych prętów sprężystych wykazuje jakościowo odmienne oddziaływanie na ruch układu. Częstości drgań swobodnych belki są niższe niż w przypadku podłoża nieważkiego.

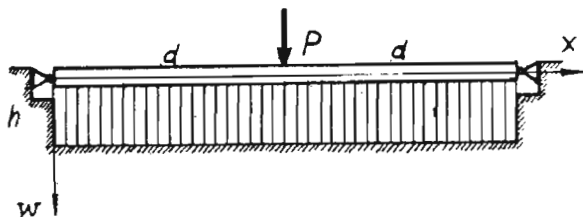
W pracach [1,5,6,7] rozpatrywano drgania układu dwóch belek połączonych inercyjnym elementem sprężystym. Usztywnienie i unieruchomienie jednej z belek prowadzi do szczególnego przypadku - belki drgającej na inercyjnym podłożu sprężystym. Z ogólnych rozwiązań drgań układu "dwubelkowego" można otrzymać odpowiednie formuły wyrażające ruch belki pojedynczej.

Łatwo wykazać, że analizowany problem jest uogólnieniem zagadnienia drgań belki na nieważkim podłożu. Pomijając masę prętów sprężystych otrzymuje się oddziaływanie podłoża w znanej postaci:

$$p = \lim_{a \rightarrow 0} k_0 h \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,0,t)} = -k_0 T \lim_{a \rightarrow 0} \left[\cos(ah) \frac{ah}{\sin(ah)} \right] X = -k_0 w(x, t).$$

6. Przykład

Rozpatrzmy wpływ masy podłoża na drgania belki swobodnie podpartej i obciążonej w środku siłą harmoniczną $P(t) = P \sin(pt)$ (rys.2).



Rys. 2.

P [N] - znana amplituda siły wymuszającej.

Dane liczbowe:

$$\begin{aligned} E &= 1 \cdot 10^{10} [\text{Nm}^{-2}], & \rho &= 2 \cdot 10^3 [\text{kgm}^{-3}], & F &= 5 \cdot 10^{-2} [\text{m}^2], & J &= 4 \cdot 10^{-4} [\text{m}^4] \\ E_0 &= 5 \cdot 10^6 [\text{Nm}^{-2}], & \rho_0 &= 1.8 \cdot 10^3 [\text{kgm}^{-3}], & b &= 5 \cdot 10^{-2} [\text{m}], & h &= 5 \cdot 10^{-1} [\text{m}] \\ k_0 &= 5 \cdot 10^5 [\text{Nm}^{-2}], & l &= 2d = 10 [\text{m}], & p &= 100 [\text{s}^{-1}], & & \end{aligned}$$

Warunki brzegowe:

$$X(0) = X''|_{(0)} = X(l) = X''|_{(l)} = 0.$$

Wprowadzając (3.11) do warunków brzegowych otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$$\sin(kl) = 0, \quad \text{więc } k_n = \frac{\pi}{l} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

oraz postacię drgań własnych:

$$X_n = \sin(k_n x) = \sin\left(\frac{\pi}{l} n x\right).$$

Obliczenia ograniczymy do $n = 3$.

Dla $k_1 = \frac{\pi}{10}$, $k_2 = 2\frac{\pi}{10}$, $k_3 = 3\frac{\pi}{10}$ z zależności (3.10) określamy trzy pierwsze częstości własne:

$$\omega_1 = 68.460, \quad \omega_2 = 98.840, \quad \omega_3 = 178.309[\text{s}^{-1}].$$

Następnie z (4.3) dla $f(x, t) = P \sin(pt) \delta(x - d)$ obliczamy (zachowując tylko człon wyrażający drgania ustalone):

$$S_n(t) = \frac{\sin(k_n d)}{(\omega_n^2 - p^2) b_n^2} P \sin(pt),$$

$$b_n^2 = \frac{l}{2} \left\{ \rho F + \frac{1}{2} \rho_0 b h [\operatorname{cosec}^2(a_n h) - (a_n h)^{-1} \operatorname{ctg}(a_n h)] \right\},$$

przy czym: $b_1^2 = 579.5$, $b_2^2 = 585.0$, $b_3^2 = 622.2[\text{kg}]$.

Ogólnie ustalone drgania wymuszone zapiszemy w tym przypadku w postaci:

$$w(x, t) = P \sin(pt) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_n d)}{(\omega_n^2 - p^2) b_n^2} \sin(k_n x).$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$w(x, t) = -P \sin(pt) \left[0.325 \sin\left(\frac{\pi}{10} x\right) + 0.074 \sin\left(3 \frac{\pi}{10} x\right) \right] \cdot 10^{-6}.$$

Uzyskane rezultaty porównamy z dwoma skrajnymi przypadkami, kiedy podłoże jest nieważkie i kiedy masa całego podłoża jest związana z belką [4].

Przyjmując $\rho_0 = 0$ z (3.10) mamy:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{\rho F} (E J k_n^4 + k_0),$$

skąd: $\omega_1 = 73.414$, $\omega_2 = 105.991$, $\omega_3 = 191.208$ [s⁻¹], wówczas:

$$w(x, t) = -P \sin(pt) \left[0.434 \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 0.075 \sin\left(3\frac{\pi}{10}x\right) \right] \cdot 10^{-6}.$$

W drugim przypadku równanie ruchu belki ma postać [4]:

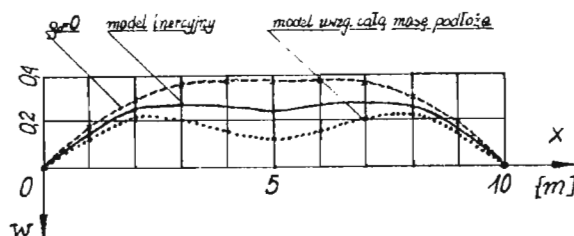
$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\rho F + \rho_0 b h) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_0 w = f(x, t).$$

Znajdujemy:

$$\omega_n^2 = \frac{EJ k_n^4 + k_0}{\rho F + \rho_0 b h},$$

wiec: $\omega_1 = 60.967$, $\omega_2 = 88.020$, $\omega_3 = 158.786$ [s⁻¹], wtedy:

$$w(x, t) = -P \sin(pt) \left[0.220 \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 0.091 \sin\left(3\frac{\pi}{10}x\right) \right] \cdot 10^{-6}.$$



Rys. 3.

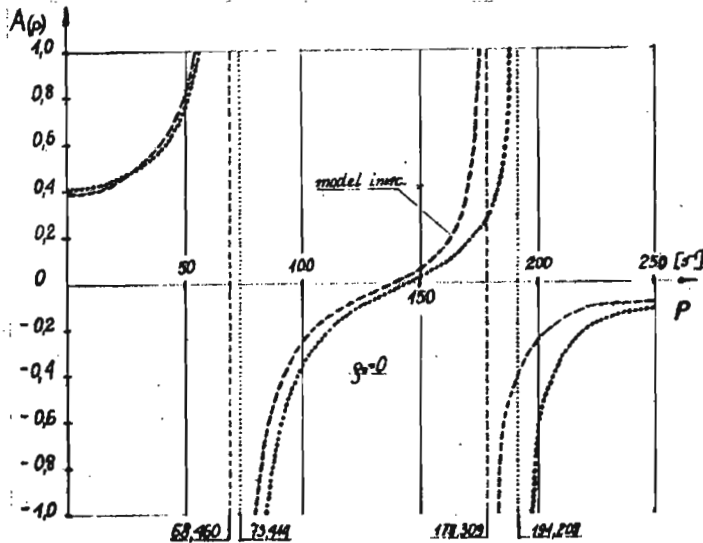
Na rys.3 przedstawione są maksymalne przemieszczenia belki dla trzech rozpatrywanych wariantów układu.

Przy przyjętej częstotliwości wymuszającej $p = 100$ [s⁻¹] pominięcie masy podłoża prowadzi w konsekwencji do wyższych od rzeczywistych amplitud drgań. Nie zachodzi to jednak dla wszystkich częstotliwości wymuszenia. Przeprowadziliśmy przykładowo obliczenia dla środkowego ($x = d$) przekroju belki, którego drgania opisuje zależność:

$$w(d, t) = P \sin(pt) \left[\frac{\sin^2(k_1 d)}{(\omega_1^2 - p^2)b_1^2} + \frac{\sin^2(k_3 d)}{(\omega_3^2 - p^2)b_3^2} \right] = A(p)P \sin(pt).$$

Na rys.4 pokazane są wykresy rezonansowe dla układu z podłożem inercyjnym i nieważkim.

Jak widać amplitudy drgań belki na podłożu inercyjnym są niższe w przedziale częstotliwości $0 \div 20$ [s⁻¹] i obszarach nadrezonansowych ($80 \div 140$ [s⁻¹], $p > 200$),



Rys. 4.

natomiast w obszarach przedrezonansowych obserwujemy amplitudy wyższe niż dla podłoża nieważkiego.

W rozwiązaniu nie uwzględniliśmy wyższych harmonicznnych (związanych z częstościami ω_5 , ω_7 , itd.), które w rozpatrzonym zakresie częstości $0 \div 250 [s^{-1}]$ są małymi wyższego rzędu. Tym niemniej dla modelu inercyjnego należy oczekiwać mniejszych amplitud w obszarach nadrezonansowych i większych w podrezonansowych także przy $p > 250 [s^{-1}]$.

Literatura

1. CHONAN S., *Dynamical Behaviours of Elastically Connected Double-Beam System Subjected to an Impulsive Load*, Bulletin of the JSME, 19,132,1976
2. CHONAN S., *Response of an Elastically Supported Finite Beam to a Moving Load with Consideration of the Mass of the Foundation*, Bulletin of the JSME, 20,150,1977
3. FRYBA L., *Vibrations of Solids and Structures under Moving Loads*, Academia, Prague 1972
4. MENDITTO G., *Comportamento dinamico di una fondazione lineare realizzata con una trave cosiddetta di Timoshenko*, Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni del Politecnico di Milano, 594,1972
5. ONISZCZUK Z., *Swobodne drgania poprzeczne układu dwóch belek połączonych inercyjnym elementem sprężystym*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 14,2,1976

6. ONISZCZUK Z., *Drgania poprzeczne układu dwóch belek połączonych inercyjnym elementem sprężystym*, Prace Techniczne, Komisja Mechaniki Stosowanej, III,6, Rzeszów 1969
7. SAITO H., CHONAN S., *Vibrations of Elastically Connected Double-Beam Systems*, Technology Reports, Tohoku University, 31,1,1969
8. SAITO H., MURAKAMI T., *Vibrations of an Infinite Beam on an Elastic Foundation with Consideration of Mass of a Foundation*, Bulletin of the JSME, 12,50,1969
9. SOLECKI R., SZYMKIEWICZ J., *Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne*, Arkady, Warszawa 1964

Summary

This paper deals with an analysis of free and forced transverse vibrations of the beam lying on the inertial elastic layer. The elastic layer is represented by a system of independent bars. The beam is subjected to an arbitrarily distributed continuous load. The motion of the system is described by two partial differential equations. The solutions are obtained with the aid of both the Bernoulli-Fourier method and the method of expansion of the normal modes of vibration in a series.

As a numerical example the vibrations of simply supported beam subjected to one concentrated harmonic force are treated.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 16 maja 1988 roku