

DRGANIA SAMOLOTU W USTALONYM RUCHU SPIRALNYM*

JERZY MARYNIAK

ITLiMS Politechnika Warszawska

JĘDRZEJ TRAJER

IMRiL Akademia Rolnicza Warszawa

1. Wstęp

W przedstawionej pracy zaprezentowano metodę badań małych drgań samolotu około położenia równowagi w spirali ustalonej [1, 2, 4].

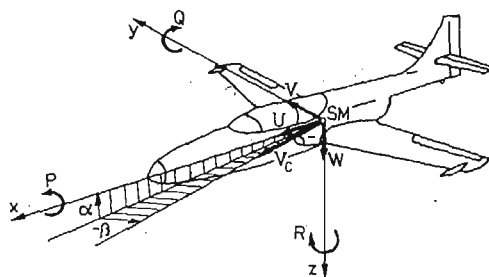
Analiza zagadnienia jest utrudniona ze względu na niepełne dane doświadczalne oraz rozbudowany aparat matematyczny. Do rozwiązania wykorzystano metody numeryczne, które pozwoliły na szybkie wyznaczenie wartości liczbowych.

Uzyskano wyniki umożliwiające ocenę własności lotnych projektowanego samolotu w warunkach lotu przestrzennego i bardziej racjonalną jego konstrukcję.

2. Model fizyczny zjawiska

Przyjęto następujące założenia modelu fizycznego zjawiska [1, 5]:

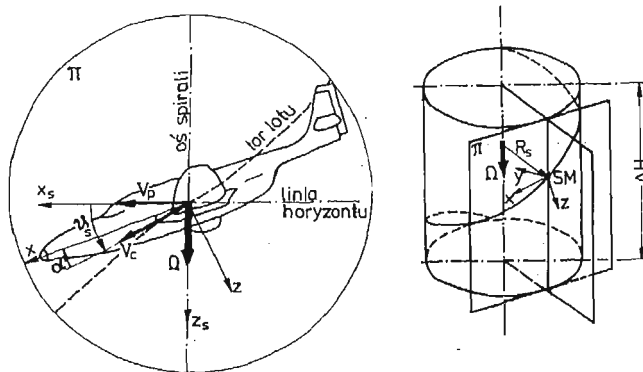
1. Samolot traktowany jest jako układ mechaniczny sztywny o sześciu stopniach swobody, rys. 1.



Rys. 1. Parametry kinematyczne lotu samolotu

*) Fragmenty pracy zostały przedstawione na IX Sympozjum „Drgania w układach fizycznych”, maj 1984, Białejewko k. Poznania.

2. Samolot charakteryzuje się konwencjonalną, symetryczną i zwartą budową.
3. Średnie kąty natarcia na płacie podczas wykonywania spirali ustalonej nie przekraczają wartości krytycznych.
4. Wchylenie powierzchni sterowych: lotek, steru kierunku i steru wysokości mają tylko wpływ parametryczny na wartości sił i momentów sił aerodynamicznych.
5. Ruch okrężny samolotu ze zmniejszeniem wysokości po trajektorii śrubowej przyjęto jako ruch w spirali, rys. 2.
6. Oś spirali ustalonej i wektor całkowitej prędkości kątowej leży w osi grawitacyjnej.



Rys. 2. Spirala ustalona

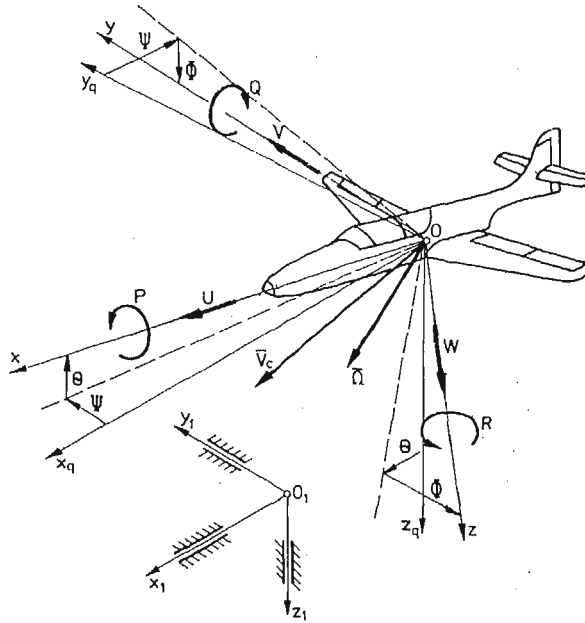
Przy budowie modelu fizycznego szczególne znaczenie ma prawidłowa interpretacja oraz właściwe wprowadzenie do modelu działających i mogących wystąpić sił zewnętrznych. Wyróżniono następujące grupy sił [1,4]:

- siły pochodzenia aerodynamicznego (wyznaczono metodą numeryczną, uwzględniono oddziaływania wynikające z wychyleń powierzchni sterowych),
- siły od urządzeń napędowych (uwzględniono oddziaływania zespołu napędowego w tym efekt giroskopowy elementów wirujących),
- siły bezwładności,
- siły grawitacyjne.

3. Model matematyczny

Do opisu dynamiki samolotu w spirali ustalonej przyjęto następujące układy współrzędnych, rys. 3, [4, 5]:

- nieruchomy układ grawitacyjny związany z Ziemią $Ox_1y_1z_1$,
- układ grawitacyjny $Ox_gy_gz_g$ związany z poruszającym się samolotem i równoległy do układu nieruchomego $Ox_1y_1z_1$,
- układ prędkości $Ox_a y_a z_a$ związany z kierunkiem przepływu ośrodka omywającego obiekt,
- układ $Oxyz$ sztywno związany z samolotem, zwany samolotowym,



Rys. 3. Przyjęte układy odniesienia

— układ Ox_s, y_s, z_s obrazujący konfigurację samolotu względem toru lotu zwany układem spiralnym.

Do analizy zagadnienia wykorzystano wyprowadzone równania ruchu samolotu [4, 5] w zmiennych α — kąt natarcia, β — kąt ślizgu, V_c — prędkość lotu, P — kątowna prędkość przechylenia, Q — kątowna prędkość pochylania, R — kątowna prędkość odchylenia. Równania te rozszerzono o dodatkowe związki kinematyczne dla Φ — kąta przechylenia i Θ — kąta odchylenia [4]:

$$\frac{d\alpha}{dt} = Q + \frac{1}{\cos\beta} \left[-\left(\frac{X}{mV_c} + R\sin\beta\right) \sin\alpha + \left(\frac{Z}{mV_c} - P\sin\beta\right) \cos\alpha \right], \quad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\left(\frac{X}{mV_c} \sin\beta + R\right) \cos\alpha + \frac{Y}{mV_c} \cos\beta - \left(\frac{Z}{mV_c} \sin\beta - P\right) \sin\alpha, \quad (2)$$

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{X}{m} \cos\alpha \cos\beta + \frac{Y}{m} \sin\beta + \frac{Z}{m} \sin\alpha \cos\beta, \quad (3)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}} \left[\left(1 - \frac{J_y - J_x}{J_z}\right) \frac{J_{xz}}{J_x} PQ - \left(\frac{J_z - J_y}{J_x} + \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}\right) QR + \frac{1}{J_x} \left(L + \frac{J_{xz}}{J_z} N\right) \right], \quad (4)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{M}{J_y} + \frac{J_z - J_x}{J_y} PR - \frac{J_{xz}}{J_y} (P^2 - R^2), \quad (5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}} \left[\left(\frac{J_x - J_y}{J_z} + \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z} \right) PQ - \left(1 - \frac{J_y - J_z}{J_x} \right) \frac{J_{xz}}{J_x} QR + \right. \\ \left. + \frac{1}{J_z} \left(\frac{J_{xz}}{J_x} L + N \right) \right], \quad (6)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = P + Q \sin \Phi \operatorname{tg} \Theta + R \cos \Phi \operatorname{tg} \Theta, \quad (7)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \quad (8)$$

gdzie: m — masa samolotu,

J_x, J_y, J_z — moment bezwładności samolotu odpowiednio względem osi Ox, Oy, Oz ,

J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} — momenty dewiacyjne samolotu,

$F = \operatorname{col}[X, Y, Z, L, M, N]$ — wektor sił zewnętrznych,

$F_a = \operatorname{col}[X^a, Y^a, Z^a, L^a, M^a, N^a]$ — wektor sił i momentów sił aerodynamicznych, przy czym $F_a = F_a(z, \varrho, \delta_s)$,

oraz

$$F = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^a - mg \sin \Theta + T \cos \delta \\ Y^a + mg \sin \Phi \cos \Theta \\ Z^a + mg \cos \Phi \cos \Theta - T \sin \delta \\ L^a \\ M^a + T \cdot e + J_T \omega_T R \\ N^a - J_T \omega_T Q \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdzie: J_T — moment bezwładności wirnika względem osi obrotu własnego,

δ — kąt odchylenia wektora ciągu T od osi Ox w płaszczyźnie $Oxyz$,

e — mimośrodek między linią działania wektora ciągu a położeniem środka masy samolotu,

ω_T — prędkość kątowa części wirujących silnika (prawoobrotowy).

W oparciu o powyższe równania opracowano program numeryczny wyznaczający parametry lotu ustalonego tzn. punkt równowagi spirali ustalonej [2, 4, 5], a następnie badano zaburzenia tego ruchu.

Układ równań ruchu w postaci normalnej ma następujący zapis macierzowy

$$\dot{z} = f(z), \quad (10)$$

gdzie:

$$z = \operatorname{col}[\alpha, \beta, V_c, P, Q, R, \Phi, \Theta].$$

Układ (10) zlinearyzowano w punkcie równowagi z^* i badano zaburzenia ruchu w bliskim otoczeniu tego punktu metodą Lapunowa [2, 3, 5]. Metoda ta nie wymaga znajomości rozwiązania ogólnego wyrażonego przez funkcje elementarne i w przypadku zlinearyzowanego równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$\dot{z} = \mathbf{A}z, \quad (11)$$

Sprowadza się do wyznaczania wartości własnych λ_j i macierzy stanu \mathbf{A} i odpowiadającym im wektorem własnym [2, 3].

Linearyzując układ równań ruchu w punkcie równowagi z^* i pomijając małe wyższego rzędu otrzymamy:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{\beta} &= \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{V}_c &= \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{P} &= \frac{\partial \dot{P}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{P}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{P}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{P}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{P}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{P}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{P}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{Q} &= \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{R} &= \frac{\partial \dot{R}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{R}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{R}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{R}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{R}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{R}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{R}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{\Phi} &= \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Theta} \vartheta, \\ \dot{\Theta} &= \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial V_c} v_c + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial P} p + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial Q} q + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial R} r + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Phi} \varphi + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} \vartheta.\end{aligned}$$

Linearyzacja ta jest przeprowadzona w oparciu o teorie małych zaburzeń [1, 2, 3].
Przyjmując

$$z = z^* + x, \quad (12)$$

gdzie

x — wektor małego zaburzenia,

$$x = \text{col}[\alpha, \beta, v_c, p, q, r, \varphi, \vartheta],$$

otrzymamy układ quasi-liniowy opisujący ruch drgający

$$\dot{x} = \mathbf{R}x + 0(x), \quad (13)$$

gdzie:

$0(x)$ — reszta z rozwinięcia Taylora,

$\mathbf{R} = f'(z^*)$ — macierz Jacobiego,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial P} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial R} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{V}_c}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{P}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{R}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{P}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{R}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial V_c} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Dla przykładu pierwszy wyraz jest następujący:

$$r(1, 1) = \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\cos \beta} \left[\left(\frac{X^a - mg \sin \Theta}{mV_c} + R \sin \beta \right) \cos \alpha + \left(\frac{Z^a + mg \cos \Theta \cos \Phi}{mV_c} - P \sin \beta \right) \sin \alpha + \frac{\frac{\partial X^a}{\partial \alpha} \sin \alpha - \frac{\partial Z^a}{\partial \alpha} \cos \alpha}{mV_c} \right].$$

Postać analityczną poszczególnych elementów r_{ij} macierzy Jacobiego \mathbf{R} wyznaczono w oparciu o wyprowadzone równania ruchu. Elementy r_{ij} zawierają pochodne aerodynamiczne $\frac{\partial F_a}{\partial z}$ w następującej postaci:

$$\frac{\partial F_a}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial X^a}{\partial \beta} & \frac{\partial X^a}{\partial V_c} & \frac{\partial X^a}{\partial P} & \frac{\partial X^a}{\partial Q} & \frac{\partial X^a}{\partial R} & \frac{\partial X^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial X^a}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial Y^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y^a}{\partial \beta} & \frac{\partial Y^a}{\partial V_c} & \frac{\partial Y^a}{\partial P} & \frac{\partial Y^a}{\partial Q} & \frac{\partial Y^a}{\partial R} & \frac{\partial Y^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial Y^a}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial Z^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z^a}{\partial \beta} & \frac{\partial Z^a}{\partial V_c} & \frac{\partial Z^a}{\partial P} & \frac{\partial Z^a}{\partial Q} & \frac{\partial Z^a}{\partial R} & \frac{\partial Z^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial Z^a}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial L^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial L^a}{\partial \beta} & \frac{\partial L^a}{\partial V_c} & \frac{\partial L^a}{\partial P} & \frac{\partial L^a}{\partial Q} & \frac{\partial L^a}{\partial R} & \frac{\partial L^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial L^a}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial M^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial M^a}{\partial \beta} & \frac{\partial M^a}{\partial V_c} & \frac{\partial M^a}{\partial P} & \frac{\partial M^a}{\partial Q} & \frac{\partial M^a}{\partial R} & \frac{\partial M^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial M^a}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial N^a}{\partial \alpha} & \frac{\partial N^a}{\partial \beta} & \frac{\partial N^a}{\partial V_c} & \frac{\partial N^a}{\partial P} & \frac{\partial N^a}{\partial Q} & \frac{\partial N^a}{\partial R} & \frac{\partial N^a}{\partial \Phi} & \frac{\partial N^a}{\partial \Theta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Wartości liczbowe powyższych wielkości obliczano numerycznie metodą różnic skończonych.

4. Przykład obliczeniowy

Opracowano program numeryczny, który na podstawie wstępnych danych dotyczących warunków lotu i parametrów samolotu wyznacza punkt równowagi spirali ustalonej

Tablica 1

Wartość własna λ_j macierzy stanu \mathbf{R} dla poszczególnych punktów równowagi spirali ustalonej

Wersja	$\lambda_{1(\alpha)}$		$\lambda_{2(\beta)}$		$\lambda_{3(\psi_e)}$		$\lambda_{4(\rho)}$		$\lambda_{5(\sigma)}$		$\lambda_{6(R)}$		$\lambda_{7(\phi)}$		$\lambda_{8(\theta)}$	
	ξ_1	η_1	ξ_2	η_2	ξ_3	η_3	ξ_4	η_4	ξ_5	η_5	ξ_6	η_6	ξ_7	η_7	ξ_8	η_8
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
STAND	-4.584	0.	-0.316	2.730	-0.316	-2.730	-0.142	-0.756	-0.142	0.756	-0.213	-0.146	-0.213	0.146	-0.011	0.
A	-0.734	-3.070	-0.734	3.070	-0.438	-2.569	-0.438	+2.569	-1.197	0.	-0.011	-0.156	-0.011	0.015	-0.002	0.
B	-6.831	0.	-0.342	-3.293	-0.342	3.293	-0.869	0.	+0.392	-0.344	0.392	0.344	-0.011	-0.045	-0.011	0.045
C	-2.575	0.	-0.747	-2.124	-0.747	2.124	1.194	0.	-0.945	0.	-0.092	0.260	-0.092	-0.260	0.026	0.
D	-5.565	0.	-0.393	3.247	-0.393	-3.247	-0.684	0.	0.208	-0.580	0.208	0.580	-0.037	-0.028	-0.037	0.028
E	-4.054	0.	-0.438	-3.168	-0.438	3.168	-1.510	-1.993	-1.510	1.993	-0.024	0.108	-0.024	-0.108	-0.006	0.
F	-5.287	0.	-0.024	2.852	-0.024	-2.852	-1.654	0.	0.903	0.	0.006	-0.962	0.006	0.962	0.003	0.
G	-5.163	0.	-0.257	2.775	-0.257	-2.775	-0.600	0.	0.121	-0.572	0.121	0.572	-0.062	0.	0.039	0.
H	-4.889	0.	-0.246	-2.753	-0.246	2.753	0.969	0.	-0.895	0.	0.082	-0.114	0.082	0.114	0.028	0.
J	-5.182	0.	-0.259	-2.778	-0.259	2.778	-0.555	0.	0.123	-0.535	0.123	0.535	-0.096	0.	-0.029	0.
K	-0.785	3.580	-0.785	3.580	-0.466	-2.705	-0.466	2.705	-1.108	0.	-0.019	0.187	-0.019	-0.187	-0.002	0.
L	-4.784	0.	-0.435	3.213	-0.445	-3.213	-0.796	1.105	-0.796	-1.105	-0.063	-0.102	-0.063	0.102	-0.014	0.
M	-4.981	0.	-0.248	-2.758	-0.248	2.758	1.004	0.	-0.860	0.	0.050	-0.125	0.050	0.125	0.028	0.
N	-4.392	0.	-0.269	-2.838	-0.269	2.838	0.017	0.098	0.017	-0.098	-0.203	-0.112	-0.203	0.112	-0.017	0.
O	-5.993	0.	-0.258	2.694	-0.258	-2.694	1.855	0.	-1.503	0.	-0.016	-0.185	-0.016	0.185	0.001	0.
P	-4.916	0.	-0.359	3.129	-0.359	-3.129	-0.758	0.	0.269	-0.512	0.269	0.512	-0.028	-0.031	-0.028	0.031
R	-0.457	-3.493	-0.457	3.493	-0.760	-3.222	-0.760	3.222	-0.329	0.	-0.070	0.210	-0.070	-0.210	-0.014	0.
S	-5.707	0.	-0.283	-2.751	-0.283	2.751	-0.813	0.	0.355	-0.343	0.355	0.343	-0.008	0.049	-0.008	-0.049
T	-4.131	0.	-0.233	-2.771	-0.233	2.771	-0.853	0.	0.293	-0.370	0.293	0.370	-0.005	-0.048	-0.005	0.048
U	-5.182	0.	-0.274	2.822	-0.274	-2.822	-0.613	0.	0.140	-0.566	0.140	0.566	-0.047	0.013	-0.047	-0.013
W	-5.170	0.	-0.268	2.783	-0.268	-2.783	-0.618	0.	0.132	-0.560	0.132	0.560	-0.048	0.011	-0.048	-0.011
Z	-5.166	0.	-0.294	-2.923	-0.294	2.923	-0.608	0.	0.135	-0.568	0.135	0.568	-0.048	-0.078	-0.048	0.077

a następnie wartości własne λ_j macierzy Jacobiego \mathbf{R} układu zlinearyzowanego równań ruchu.

Na podstawie otrzymanych wyników przeprowadzono analizę zaburzeń ruchu samolotu w spirali ustalonej.

Samolotem testującym był poddźwiękowy samolot odrzutowy TS-11 „Iskra”.

Analizę przedstawiono dla różnych zmian:

- parametrów lotu (wersja S , ..., F),
- ciągu silnika (z uwzględnieniem i bez uwzględnienia zjawiska giroskopowego) i wysokości lotu (wersja G , ..., M),
- czynników konstrukcyjnych, (wersja N , ..., Z) TABELA 1, patrz: „Analiza numeryczna parametrów lotu i sterowania samolotu w ustalonym ruchu spiralnym”.

Przy ocenie zaburzeń ruchu zwracano szczególną uwagę na wartość własną λ_1 (odpowiadającą zmianom kąta natarcia α), gdyż wartość kąta α ma decydujący wpływ na wartość sił i momentów aerodynamicznych.

Przy ocenie zaburzeń kierowano się następującymi kryteriami

- a) $\lambda_j = \xi_j$ dla $\xi_j > 0$ aperiodyczny ruch rozbieżny,
dla $\xi_j < 0$ „ „ „ „ tłumiony,
- b) $\lambda_j = \xi_j \pm i\eta_j$ ruchy okresowe sprzężone,
- c) $\xi_j = |\operatorname{Re} \lambda_j|$ ilościowe ujęcie stateczności lub niestateczności ruchu — współczynnik tłumienia,
- d) $\eta_j = |\operatorname{Im} \lambda_j|$ wartość charakteryzująca częstotliwość drgań ruchu odpowiadającego rozwiązaniu szczegółowemu — częstość drgań,
- e) $x_j = R_j e^{\lambda_j t}$ rozwiązanie szczegółowe,
- f) $T_j = \frac{2\pi}{\eta_j}$ okres wahań,
- g) $T_{\frac{1}{2}j} = -\frac{\ln 2}{\xi_j}$ czas stłumienia amplitudy do połowy,
- h) $d = \frac{e^{(t+1)}}{e^t}$ dekrement ruchu, wyrażający ilościową zmianę rozwiązania w ciągu sekundy.

5. Wnioski

1. Przedstawiona metoda badań zaburzeń ruchu ustalonego w spirali dostarczyła wiele cennych informacji poznawczych o zjawisku, które mogą być wykorzystane w projekcie wstępnym samolotu.
2. Przedstawiona metoda analizy dostarcza wszelkich danych o zaburzeniu ruchu samolotu w przypadku jego pełnej trójwymiarowości. Zastosowany model cyfrowy obliczeń umożliwia łatwą i szybką analizę.
3. Przedstawiony model matematyczny i cyfrowy łatwo może być rozszerzony o dodatkowe stopnie swobody, jak odkształcalność konstrukcji i układu sterowania.
4. Przedstawione wyniki wskazują duży wpływ na własności dynamiczne samolotu zmiany masy i wyważenia.

Literatura

1. W. FISZDON, *Mechanika lotu, Część I i II*, PWN Łódź, Warszawa 1961.
2. R. GUTOWSKI, *Podstawy teorii stateczności ruchu układów dyskretnych i ciągłych*, WPW Warszawa 1981.
3. J. LA SALLE, S. LEFSCHETZ, *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej*, PWN Warszawa 1966.
4. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika Nr 32 WPW Warszawa 1976.
5. J. TRAJER, *Modelowanie i badanie własności dynamicznych poddźwiękowego samolotu odrzutowego w sterowanym ruchu spiralnym*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska Warszawa 1983.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ САМОЛЁТА В УСТАНОВИВШЕМСЯ СПИРАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

В статье представлено метод теоретических исследований малых колебаний самолёта вокруг положения равновесия в установившемся спиральном движении.

Принимая теорию малых возмущений линеаризовано уравнения пространственного движения самолёта. Численные вычисления сведено к расчётам собственных значений и соответствующим им собственным векторам. Приведено расчёты для самолёта класса TS-11 „Iskra”.

Summary

THE VIBRATIONS OF AIRPLANE IN A STEADY SPIRAL MOTION

In the paper a method of analysis of airplane small vibrations about the equilibrium position in a steady spiral motion is presented.

The motions disturbances near equilibrium point are discussed according to Lapunow method. The analysis is based on a full set of motion differential equations, linearised in accordance with the theory of small disturbances.

A comparative analysis of results for selected parameters is presented.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 września 1985 roku