

## ANALIZA DYNAMIKI STEROWANEJ ŁOPATY NOŚNEGO WIRNIKA ŚMIGŁOWCA METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH\*

JERZY MANEROWSKI (WARSZAWA)

ITWL

### 1. Wstęp

W pracy przedstawiono metodykę numerycznego badania dynamiki sterowanej łopaty nośnego wirnika śmigłowca w zawisie. Wykorzystano przy tym metodę elementów skończonych w wersji przemieszczeniowej ([1, 6 i 7]) oraz metodę numerycznego całkowania Wilsona-Newmarka [2].

W opracowanym modelu łopatę potraktowano jako odkształcalną belkę o zmiennych wzdłuż długości parametrach sztywności, bezwładności i tłumienia [3]. Uwzględniono przy tym wpływ bezwładności obrotu przekrojów na linię ugięcia łopaty [4].

Obciążenie aerodynamiczne łopaty wyznaczono w oparciu o teorię quasi-ustalonego przepływu — analogicznie jak w pracy [3].

Zamieszczono algorytm numerycznego badania dynamiki sterowanej łopaty oraz wyniki przykładowych obliczeń.

### 2. Równania dynamicznej równowagi

Niżej zamieszczono wyprowadzone równania dynamicznej równowagi wirującej łopaty nośnego wirnika śmigłowca w zawisie (rys. 1). Zastosowano metodę elementów skończonych w wersji przemieszczeniowej ([1, 6 i 7]).

Wprowadzono następujące układy współrzędnych prostokątnych (rys. 1):

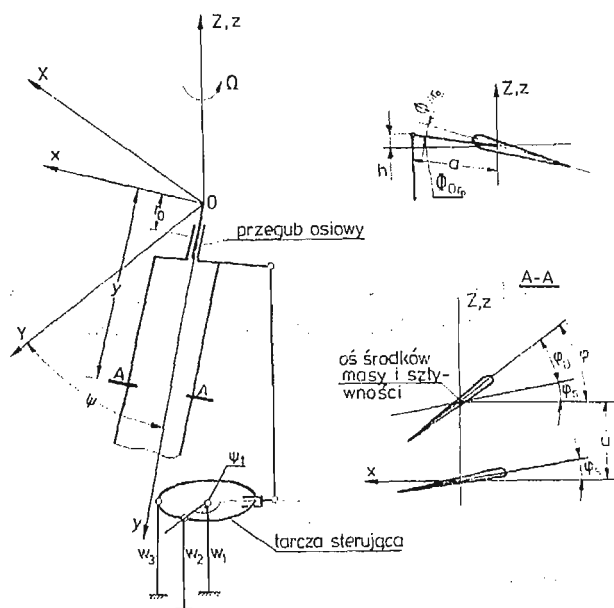
$OXYZ$  — inercjalny układ związany ze śmigłowcem,

$Oxyz$  — związany z osią przekręceń nie odkształconej łopaty,

$Ox_i y_i z_i$  — związany z  $i$ -tym elementem skończonym.

Łopatę traktowano jako odkształcalną belkę ([3 i 4]) o zmiennych wzdłuż długości parametrach. Przyjęto, że materiał łopaty spełnia założenia lepkosprężystego modelu Voigta [5].

\*) Praca przedstawiona na I Ogólnopolskiej Konferencji „Mechanika w Lotnictwie” Warszawa 1984.01.19.



Rys. 1.

Założono, że kąt ustawienia łopaty  $\varphi(y, t)$  (rys. 1) jest zmienny w czasie i jest zależny od położenia tarczy sterującej oraz azymutu łopaty  $\psi(t)$ .

Ograniczono się do przypadku łopaty sztywno zamocowanej do wirnika i wirującej ze stałą prędkością kątową  $\Omega$ . Założono, że przemieszczenia łopaty w kierunku osi  $x$  i  $y$  są pomijalnie małe w porównaniu z przemieszczeniami wzdłuż osi  $z$ .

Obciążenia aerodynamiczne łopaty śmigłowca w zawisie (rys. 1), zgodnie z teorią quasi-ustalonego przepływu, stanowią (por. [3]):

— siła aerodynamiczna (ciąg)

$$T(y, t) = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial C_z}{\partial \varphi} b \left[ \varphi \Omega^2 y^2 - \Omega y \frac{\partial u}{\partial t} + \left( 0,75 - \frac{x_0}{b} \right) b \Omega y \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right], \quad (2.1)$$

— moment pochylający (moment skręcający)

$$M(y, t) = -\frac{\pi}{16} \rho b^3 \Omega y \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sigma_f T(y, t) \quad (2.2)$$

gdzie:  $\rho$  — gęstość powietrza,  $C_z$  — współczynnik siły nośnej,  $b$  — cięciwa łopaty,  $x_0$  — odległość osi sztywności od noska profilu,  $\sigma_f$  — odległość ogniska aerodynamicznego od osi sztywności,

oraz

$$\varphi = \varphi(y, t) = \varphi_s(y) + \varphi(y, t) \quad (2.3)$$

$\varphi_0(y, t)$  — zmienny w czasie kąt ustawienia łopaty, związany ze sterowaniem łopaty oraz jej odkształceniami,

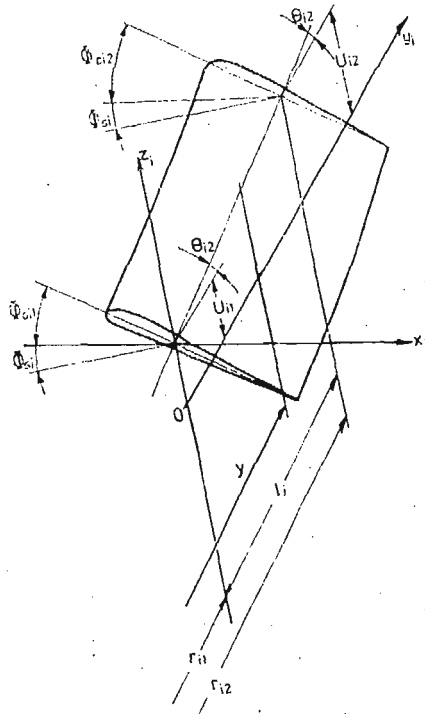
$\varphi_s(y)$  — kąt ustawienia nie odkształconej łopaty.

Celem ułożenia równań równowagi, łopatę podzielono na  $i$  odkształcalnych elementów skończonych (rys. 2) o: długości  $l_i$ , stałych kątach ustawienia  $\Phi_{si}$  (kąt ustawienia nie odkształconej łopaty — wzór (2.3) oraz stałych wartościach parametrów sztywności, bezwładności i tłumienia:

$EJ_x, GJ_y$  — odpowiednio sztywność na zginanie i skręcanie,

$m, I_x, I_y$  — odpowiednio masa i masowe momenty bezwładności na jednostkę długości względem osi  $x_i$  i  $y_i$ ,

$\varepsilon_z, \varepsilon_s$  — współczynniki tłumienia materiałowego odpowiednio dla zginania i skręcania.



Rys. 2.

Założono również stałe wartości  $b, x_0, \sigma_f$  i  $\frac{\partial c_z}{\partial \varphi}$  (por. (2.1) i (2.2)) wzdłuż długości elementu.

Funkcje przemieszczenia  $i$ -tego elementu założono w postaci wielomianów algebraicznych: dla zginania wielomian trzeciego stopnia i dla skręcania wielomian pierwszego stopnia. Jako stopnie swobody elementu przyjęto: przemieszczenie  $U$ , kąt obrotu przekroju  $\theta$  i kąt skręcenia  $\Phi_0$  lewej oraz prawej krawędzi (rys. 2).

Po uwzględnieniu powyższych ustaleń oraz wykorzystaniu zasady prac wirtualnych, równanie równowagi omawianej łopaty przyjmuje postać:

$$[K_1] \{U_1\} + [C_1] \{\dot{U}_1\} + [B_1] \{\ddot{U}_1\} = \{F_1\}, \quad (2.4)$$

gdzie:

$$\{U_1\} = [U, \theta, \Phi_0]_1, (U, \theta, \Phi_0)_2 \dots (U, \theta, \Phi_0)_k]^T, \quad (2.5)$$

$k = i + 1$  — liczba węzłów łopaty, przy czym  $(U, \Theta, \Phi_0)_1$  są przemieszczeniami łopaty na promieniu  $r_0$  (rys. 1).

Warunki brzegowe dla łopaty (rys. 1) są następujące:

$$\begin{aligned} u(r_0, t) &= U_{r_0}(t) = U_1 = 0, \\ \frac{\partial u(r_0, t)}{\partial y} &= \Theta_{r_0}(t) = \Theta_1 = 0, \\ \varphi_0(r_0, t) &= \Phi_{0,r_0}(t) = \Phi_{01}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 3. Numeryczne rozwiązanie problemu

Opierając się na równaniu (2.4) i warunkach (2.6), przy wykorzystaniu metody numerycznego całkowania Wilsona-Newmarka, zbadano dynamikę sterowanej łopaty śmigłowca w zawisie.

W tym celu równanie (2.4), po uwzględnieniu (2.6), przedstawiono w postaci:

$$[K] \{U\} + [C] \{\dot{U}\} + [B] \{\ddot{U}\} = \{F\}. \quad (3.1)$$

Liczba równań zależności (3.1) zmniejszona jest o trzy w porównaniu z zależnością (2.4).

Macierze współczynników równania (3.1) oraz wektorów  $\{U\}$ ,  $\{\dot{U}\}$ ,  $\{\ddot{U}\}$  i  $\{F\}$  określone są następująco:

$[K]$ ,  $[C]$  i  $[B]$  są odpowiednio macierzami powstałymi w wyniku odrzucenia pierwszych trzech wierszy i kolumn w macierzach  $[K_1]$ ,  $[C_1]$  i  $[B_1]$ ;

$$(3.2) \quad \{U\} = [(U, \Theta, \Phi_0)_2 \dots (U, \Theta, \Phi_0)_k]^T$$

oraz analogicznie  $\{\dot{U}\}$  i  $\{\ddot{U}\}$ :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{14} \\ F_{15} \\ \vdots \\ F_{1k} \end{Bmatrix} - \dot{\Phi}_{01} \begin{Bmatrix} C_{143} \\ C_{153} \\ \vdots \\ C_{1k3} \end{Bmatrix} - \ddot{\Phi}_{01} \begin{Bmatrix} B_{143} \\ B_{153} \\ \vdots \\ B_{1k3} \end{Bmatrix} - \Phi_{01} \begin{Bmatrix} K_{143} \\ K_{153} \\ \vdots \\ K_{1k3} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Kąt ustawienia łopaty  $\Phi_{01} = \Phi_{0,r_0} = \Phi(t)$  zależny jest od położenia tarczy sterującej. Wielkość tego kąta określono z zależności geometrycznych i kinematycznych (rys. 1):

$$\begin{aligned} \Phi_{01} &= \arcsin \frac{h}{a}, \\ h &= h(t) = w_1(t)(1 - \cos \psi_t - \sin \psi_t) + w_2(t) \sin \psi_t + w_3(t) \cos \psi_t, \\ \psi_t &= \psi_t(t) = \Omega t + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 4. Algorytm numerycznego badania dynamiki

Do rozwiązania równania (3.1) wykorzystano metodę całkowania [2]. Metoda ta pozwala na obliczenie w chwili  $t + \Delta t$  wektorów  $\{U\}$ ,  $\{\dot{U}\}$  i  $\{\ddot{U}\}$ , jeżeli znane są te wektory w chwili  $t$ , przy założeniu liniowej zmiany  $\{\ddot{U}\}$  w przedziale  $t + \tau$ , gdzie  $\tau = \gamma \Delta t$ , a  $\gamma > 1$ .

Poniżej przedstawiono algorytm rozwiązania równania (3.1), zapisany w sposób zgodny z chronologią kolejnych etapów obliczeń.

W zastosowanej metodzie jej autor [2] zaleca wprowadzenie wielkości  $\alpha$ ,  $\delta$  oraz  $a_0 - a_9$ , które są wartościami stałymi dla stałego kroku całkowania  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1/6, & \delta &= 1/2, & \gamma &= 1,4, & \tau &= \gamma \Delta t \\ a_0 &= 1/\alpha \tau^2, & a_1 &= \delta/\alpha \tau, & a_2 &= 1/\alpha \tau, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 1/\alpha \tau^2 - 1, & a_4 &= \delta/\alpha - 1, & a_5 &= \tau(\delta/\alpha - 2)/2, \\ a_6 &= \Delta t(1 - \delta), & a_7 &= \Delta t \delta, & a_8 &= \Delta t^2(1/2 - \alpha), \\ a_9 &= \alpha \Delta t. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Kolejnym etapem obliczeń jest wyznaczenie macierzy  $[K^*]$  i  $[F^*]$ , a następnie wektora przemieszczeń w chwili  $t + \tau$ :

$$\begin{aligned} [K^*] &= [K] + a_0[B] + a_1[C], \\ \{F^*\} &= \{F(t + \tau)\} + [M](a_0\{U(t)\} + a_2\{\dot{U}(t)\} + a_3\{\ddot{U}(t)\} + \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} &+ [C](a_1\{U(t)\} + a_4\{\ddot{U}(t)\} + a_5\{\dot{U}(t)\}), \\ [K^*]\{U(t + \tau)\} &= \{F^*\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Po wyznaczeniu  $\{U(t + \tau)\}$  można obliczyć  $\{\ddot{U}(t + \tau)\}$ , a następnie:

$$\{\ddot{U}(t + \tau)\}, \{\dot{U}(t + \Delta t)\} \text{ i } \{U(t + \Delta t)\}. \quad (4.5)$$

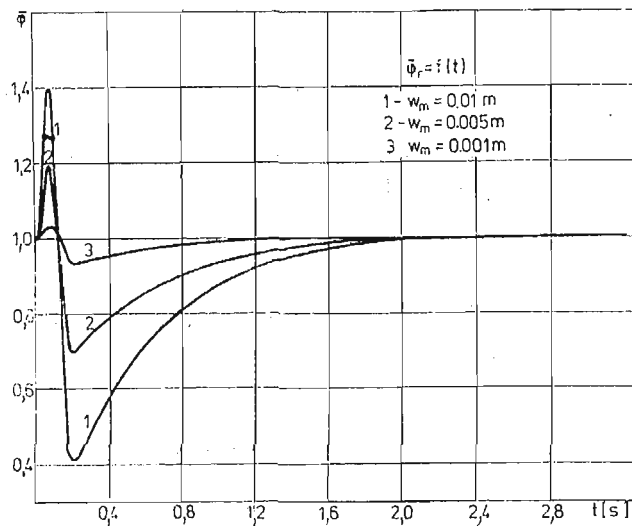
$$\begin{aligned} \{\ddot{U}(t + \tau)\} &= a_0(\{U(t + \tau)\} - U(t)) - a_2\{\dot{U}(t)\} - a_3\{\ddot{U}(t)\} \\ \{\ddot{U}(t + \Delta t)\} &= \{\ddot{U}(t)\} + (\{\ddot{U}(t + \tau)\} - \{\ddot{U}(t)\})/\gamma \\ \{\dot{U}(t + \Delta t)\} &= \{\dot{U}(t)\} + a_6\{\ddot{U}(t)\} + a_7\{\ddot{U}(t + \Delta t)\} \\ \{U(t + \Delta t)\} &= \{U(t)\} + \Delta t\{\dot{U}(t)\} + a_8\{\ddot{U}(t)\} + a_9\{\ddot{U}(t + \Delta t)\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Po wyznaczeniu wektorów (4.6) obliczyć można rzeczywiste kąty ustawienia (2.3) oraz obciążenie aerodynamiczne (2.1) i (2.2). Do realizacji obliczeń ((4.1) - (4.6)) niezbędna jest znajomość warunków początkowych. Poniżej podano warunki początkowe dla następującego przypadku. Łopata wiruje przy położeniu tarczy sterującej (rys. 1)  $w_1 = w_2 = w_3 = w$ , po czym w chwili  $t = t_0$  następuje zmiana położenia tarczy — zgodnie z określonym programem. Zgodnie z tym założeniem w chwili  $t = t_0$   $\{\ddot{U}(t_0)\} = \{\dot{U}(t_0)\} = 0$ . Wektor  $\{U(t_0)\}$  można wyznaczyć bezpośrednio z (3.1) po obliczeniu wielkości (3.4).

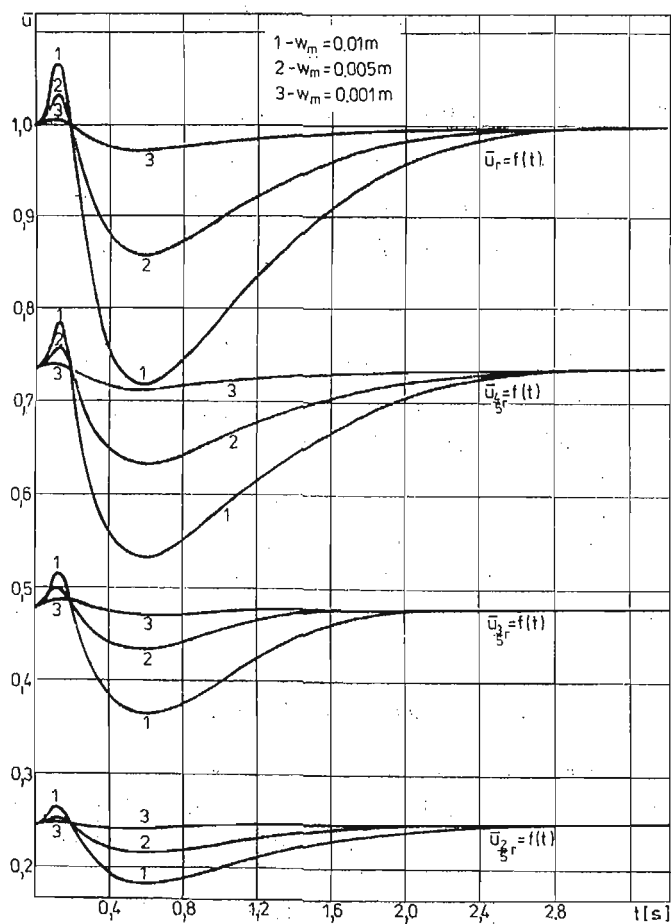
## 5. Przykładowe wyniki obliczeń

Celem przeprowadzenia obliczeń opracowano program do badania dynamiki łopat wirników nośnych śmigłowca (rys. 1). Program napisano w języku FORTRAN 1900 na maszynie cyfrową „Odra 1305”. Do rozwiązywania równań (4.3) wykorzystano, analogicznie jak w [7], procedury IPASMO i XPASMO [6].

Na rys. 3 ÷ 6 zamieszczono przykładowe wyniki obliczeń dla łopaty wirującej ze stałą prędkością kątową  $\Omega = 20$  rad/s. Przyjęto, że łopata wiruje przy położeniu tarczy sterującej



Rys. 3.



Rys. 4.

$w_1 = w_2 = w_3 = 0,01$  m, po czym w czasie  $t = 0 \div 0,2$  s następuje zmiana jej położenia wg programu:

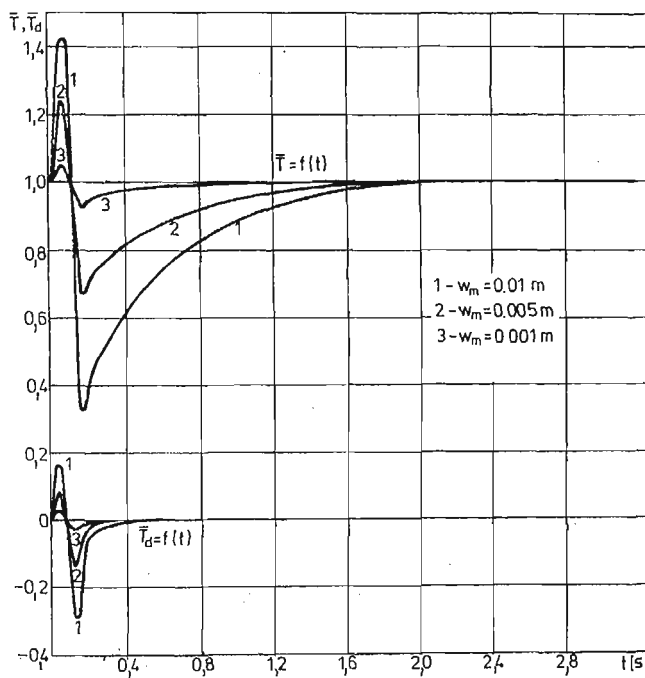
$$w_1 = w_2 = 0,01, \quad w_3 = w_m \sin \left( \frac{\pi}{2} \frac{t}{0,1} \right). \quad (5.1)$$

Dla  $t \geq 0,2$  s przyjęto  $w_1 = w_2 = w_3 = 0,01$  m.

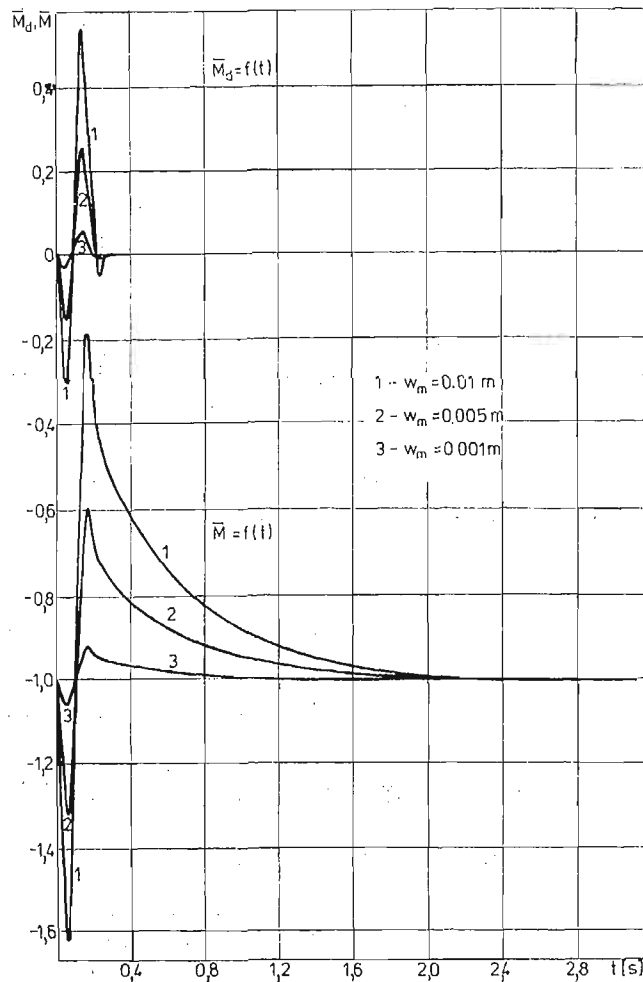
Na rys. 3 pokazano zmianę w czasie względnego kąta ustawienia łopaty na promieniu zewnętrznym ( $\bar{\varphi}_r(t) = \varphi_r(t)/\varphi_{r_0}(t)$ ). Z kolei na rys. 4 przedstawiono zmianę względnych przemieszczeń łopaty ( $\bar{u}_y(t) = u_y(t)/u_r(t_0)$ ) na promieniach  $y = \frac{2}{5}r, \frac{3}{5}r, \frac{4}{5}r$  i  $r$ .

Zmianę w czasie względnego obciążenia aerodynamicznego łopaty  $\bar{T}(t) = T(t)/T(t_0)$  i  $\bar{M}(t) = M(t)/M(t_0)$  pokazano na rys. 5 i 6. Dodatkowo naniesiono na tych rysunkach człony dynamiczne obciążenia, a więc człony zależne od pochodnych względem czasu kąta ustawienia i przemieszczenia (por. (2.1) i (2.2)).

Naturalnie przedstawione wyniki należy traktować jedynie jako przykładowe, a więc nie wyczerpujące wszystkich możliwości podanego algorytmu.



Rys. 5.



Rys. 6.

## Literatura

1. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*. Arkady 1972.
2. E. L. WILSON, *Numerical method for dynamics analysis*. International symposium on numerical methods offshore engineering, Swensa 1977.
3. Z. DŻYGADŁO, W. SOBIERAJ, *Natural, flexural — torsional vibration analysis of helicopter rotor blades by the finite element method*. Journal of Technical Physics 4, 1977.
4. J. LIPKA, *Wpływ bezwładności obrotowej oraz sił poprzecznych na drgania własne wirujących prętów*. Archiwum Budowy Maszyn, t. VII, z. 3, 1960.
5. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale w ciałach stałych*. PWN, Warszawa 1966.
6. J. SZMELTER, *Metody komputerowe w mechanice*. PWN, Warszawa 1980.
7. Z. DŻYGADŁO, J. MANEROWSKI, *Vibration and stability analysis of rotors on orthotropic supports*. Journal of Technical Physics, 23, 1982.



## Р е з ю м е

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЛОПАСТИ НЕСУЩЕГО ВИНТА ВЕРТОЛЁТА МЕТОДОМ  
КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

В настоящей работе представлен метод численного анализа перемещений и нагрузок управляемой лопасти несущего винта вертолётa в положении висения. Был применён метод конечных элементов в варианте перемещений. При решении уравнений динамического равновесия был использован метод численного интегрирования Уилсона-Ньюмарка.

В статье представлены результаты примерных расчётов.

## S u m m a r y

DYNAMICAL ANALYSIS OF ROTOR BLADE OF A HELICOPTER  
BY FINITE ELEMENT METHOD

The numerical analysis method of displacements and loads for a controllable rotor blade of a helicopter during hovering has been presented. The finite element method in version of the displacement method has been used. The Wilson-Newmark numerical integration method has been used for solution of equation of dynamic equilibrium. Results of exemplifying calculations have been placed.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 grudnia 1984 roku*

---