

## OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE MODELU ŁUKU O OSI ŚCIŚLIWEJ<sup>1)</sup>

BOGDAN BOCHENEK

*Politechnika Krakowska*

### 1. Uwagi wstępne

W przypadku optymalnego kształtowania niektórych drgających i narażonych na utratę stateczności elementów konstrukcji okazuje się, że element ukształtowany z uwagi na podstawową wartość własną, związaną z odpowiednią formą drgań lub wybożenia (optymalizacja jednomodalna) posiada niższą wartość drugiej wartości własnej związanej z inną formą drgań lub wybożenia.

Jako pierwszy zaobserwował ten fakt J. KIUSALAAS [6] w przypadku optymalizacji ściskanego pręta na sprężystym podłożu. Jednak dopiero N. OLHOFF i S. H. RASMUSSEN w pracy [9] dotyczącej optymalnego kształtowania obustronnie utwierdzonego pręta ściskanego siłą osiową przeprowadzili szczegółową analizę problemu oraz sformułowali poprawny w takim przypadku warunek optymalności. Autorzy zaproponowali aby w razie stwierdzenia niewystarczalności sformułowania jednomodalnego stosować sformułowanie dwumodalne optymalizacji polegające na kształtowaniu z uwagi na podwójną wartość własną związaną z dwiema formami drgań lub wybożenia.

Od czasu ukazania się pracy N. Olhoffa i S. H. Rasmussena rozwiązanych zostało wiele zadań optymalizacji z uwzględnieniem dwumodalnego sformułowania. I tak m.in. S. PRAGER i W. PRAGER [11], A. GAJEWSKI [5], B. BOCHENEK i A. GAJEWSKI [4] rozwiązali problem dla drgających prętów, E. F. MASUR i Z. MRÓZ [8], B. BOCHENEK i A. GAJEWSKI [3] dla narażonej na utratę stateczności ramy natomiast J. BŁACHUT i A. GAJEWSKI [1] [2] oraz N. OLHOFF i R. H. PLAUT [10] dla drgających i narażonych na utratę stateczności łuków. W niemal wszystkich wymienionych pracach wykorzystano liniowe ujęcie problemu, co w przypadku analizy stateczności układu sprowadza się do uwzględnienia jedynie utraty stateczności przez bifurkację. Jedynie praca [2] zawiera ujęcie nieliniowe (uwzględnienie utraty stateczności przez przeskoki), ale rozwiązanie problemu wymaga wykorzystania skomplikowanej i pracochłonnej procedury numerycznej.

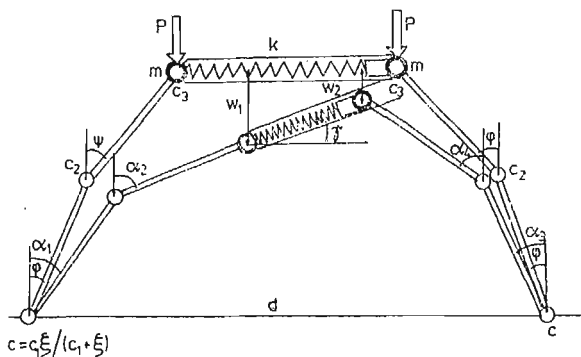
W niniejszej pracy w celu przedstawienia charakterystycznych cech optymalnego kształtowania łuku o osi ściśliwej (w ujęciu nieliniowym) zastąpimy rzeczywisty łuk prostym układem prętowym o czterech stopniach swobody, a problem kształtowania sprowadzimy do optymalizacji parametrycznej.

Rezultatem dwumodalnej optymalizacji w przypadku rozważania obu możliwych form utraty stateczności jest zrównanie się punktów odpowiadających bifurkacji i przeskokowi (na podstawowej ścieżce obciążenia).

<sup>1)</sup> Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego PW. 05-12.

## 2. Równania podstawowe

Rozważmy układ przedstawiony na rys. 1 (podobny układ wykorzystali A. D. KERR i M. T. SOIFER w pracy [7]). Złożony jest on z pięciu prętów połączonych przegubami sprężystymi, przy czym dla uproszczenia zakładamy, że tylko jeden pręt jest ściśliwy (ściśliwość pręta modelowana jest sprężyną o sztywności  $k$ ). Sposób zamocowania końców pręta charakteryzuje parametr  $\xi$ , który dla przegubowego zamocowania jest równy zero, a dla sztywnego utwierdzenia zmierza do nieskończoności. Ten dyskretny układ modelo-

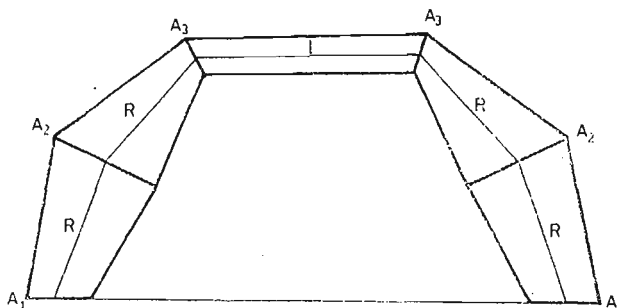


Rys. 1

wać ma sprężystie zamocowany rzeczywisty łuk o zmieniającym się w sposób ciągły polu powierzchni przekroju poprzecznego  $A$ . Zakładamy ponadto, że sztywności przegubów są proporcjonalne do pola powierzchni przekroju poprzecznego układu rzeczywistego.

$$c_i = \text{const } A_i^\nu \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

gdzie wykładnik  $\nu$  w typowych przypadkach przyjmuje wartości 1, 2, 3 oraz, że wzdłuż długości prętów zmiana pola powierzchni przekroju poprzecznego jest liniowa (rys. 2).



Rys. 2

Równania opisujące zachowanie się układu (nieliniowe drgania) wyprowadzamy w oparciu o równania Lagrange'a drugiego rodzaju.

Energię potencjalną równą różnicy energii sprężystości sprężyny i przegubów oraz pracy sił zewnętrznych na przemieszczeniach  $w_1$ ,  $w_2$  przedstawia równanie

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} k(\Delta l)^2 + \frac{1}{2} c(\alpha_1 - \varphi)^2 + \frac{1}{2} c_2(\alpha_2 - \alpha_1 - \psi + \varphi)^2 + \\ & + \frac{1}{2} c(\alpha_3 - \varphi)^2 + \frac{1}{2} c_2(\alpha_4 - \alpha_3 - \psi - \varphi)^2 + \\ & + \frac{1}{2} c_3(\psi - \alpha_2 - \gamma)^2 + \frac{1}{2} c_3(\psi - \alpha_4 + \gamma)^2 - P(w_1 + w_2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

natomiast energię kinetyczną mas skupionych równanie

$$\begin{aligned} \pi_k = & \frac{1}{2} m \left\{ \left[ \frac{d}{dt} (R \sin \alpha_1 + R \sin \alpha_2) \right]^2 + \left[ \frac{d}{dt} (R \cos \alpha_1 + R \cos \alpha_2) \right]^2 + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{d}{dt} (d - R \sin \alpha_3 - R \sin \alpha_4) \right]^2 + \left[ \frac{d}{dt} (R \cos \alpha_3 + R \cos \alpha_4) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

W równaniach (2.2) i (2.3) wprowadzono następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} w_1 &= R(\cos \varphi - \cos \alpha_1 + \cos \psi - \cos \alpha_2), \\ w_2 &= R(\cos \varphi - \cos \alpha_3 + \cos \psi - \cos \alpha_4), \\ \lambda &= \frac{R}{l}, \\ \kappa &= 1 + \lambda(2 \sin \varphi + 2 \sin \psi - \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 - \sin \alpha_3 - \sin \alpha_4), \\ \Delta l &= l \left( 1 - \frac{\kappa}{\cos \gamma} \right), \\ \gamma &= \arctg \frac{\lambda}{\kappa} (\cos \alpha_3 + \cos \alpha_4 - \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Parametr  $\lambda$  charakteryzuje wyniosłość modelowanego łuku.

Wstawiając (2.2) i (2.3) do równań

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \pi_k}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) - \frac{\partial \pi_k}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.5)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & mR^2 [\ddot{\alpha}_1 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \ddot{\alpha}_2 + \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_2^2] + \\ & + k l R \left( 1 - \frac{\kappa}{\cos \gamma} \right) \cos(\alpha_1 + \gamma) + c(\alpha_1 - \varphi) - c_2(\alpha_2 - \alpha_1 - \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$- \psi + \varphi) + c_3(\alpha_2 - \alpha_4 + 2\gamma) \frac{\lambda}{\kappa} \cos \gamma \sin(\alpha_1 + \gamma) - P R \sin \alpha_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} & mR^2 [\ddot{\alpha}_2 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \ddot{\alpha}_1 - \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_1^2] + \\ & + k l R \left( 1 - \frac{\kappa}{\cos \gamma} \right) \cos(\alpha_2 + \gamma) + c_2(\alpha_2 - \alpha_1 - \psi + \varphi) - \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$- c_3 \left[ (\psi - \alpha_2 - \gamma) - \frac{\lambda}{\kappa} (\alpha_2 - \alpha_4 + 2\gamma) \cos \gamma \sin(\alpha_2 + \gamma) \right] - P R \sin \alpha_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& mR^2 [\ddot{\alpha}_3 + \cos(\alpha_3 - \alpha_4) \ddot{\alpha}_4 + \sin(\alpha_3 - \alpha_4) \dot{\alpha}_4^2] + \\
& + kIR \left( 1 - \frac{\kappa}{\cos \gamma} \right) \cos(\alpha_3 - \gamma) + c(\alpha_3 - \varphi) - c_2(\alpha_4 - \alpha_3 - \\
& - \psi + \varphi) + c_3(\alpha_4 - \alpha_2 - 2\gamma) \frac{\lambda}{\kappa} \cos \gamma \sin(\alpha_3 - \gamma) - PR \sin \alpha_3 = 0,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
& mR^2 [\ddot{\alpha}_4 + \cos(\alpha_3 - \alpha_4) \ddot{\alpha}_3 - \sin(\alpha_3 - \alpha_4) \dot{\alpha}_3^2] + \\
& + kIR \left( 1 - \frac{\kappa}{\cos \gamma} \right) \cos(\alpha_4 - \gamma) + c_2(\alpha_4 - \alpha_3 - \psi + \varphi) - \\
& - c_3 \left[ (\psi - \alpha_4 + \gamma) - \frac{\lambda}{\kappa} (\alpha_4 - \alpha_2 - 2\gamma) \cos \gamma \sin(\alpha_4 - \gamma) \right] - PR \sin \alpha_4 = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Aby zbadać różne formy utraty stateczności, poprzez badanie częstości małych liniowych drgań, nałożonych na nieliniowe statyczne ugięcie rozwijamy zmienne  $\alpha_i$ ,  $\gamma$  w szereg

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \alpha_{i0} + \epsilon \alpha_{i1} + \dots \\
\gamma &= \gamma_0 + \epsilon \gamma_1 + \dots \quad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Indeks „0” odpowiada symetrycznemu nieliniowemu statycznemu ugięciu, „1” małym liniowym drganiom wokół położenia równowagi a  $\epsilon$  jest małym parametrem.

Uwzględniając (2.10) w równaniach (2.5) po wykorzystaniu związków (2.2) i (2.3) otrzymujemy dwa układy czterech równań. Pierwszy, opisujący statyczne ugięcie po wykorzystaniu warunków symetrii

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} &= \alpha_{30}, \quad \alpha_{20} = \alpha_{40}, \\
\gamma_0 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

redukuje się do dwóch równań przestępnych

$$\begin{aligned}
& K(1 - \kappa_0) \cos \alpha_{10} + c_1^* \frac{\xi^*}{c_1^* + \xi^*} (\alpha_{10} - \varphi) - \\
& - c_1^* a (\alpha_{20} - \alpha_{10} - \psi + \varphi) - P^* R \sin \alpha_{10} = 0,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
& K(1 - \kappa_0) \cos \alpha_{20} + c_1^* a (\alpha_{20} - \alpha_{10} - \psi + \varphi) - \\
& - c_1^* b (\psi - \alpha_{20}) - P^* \sin \alpha_{20} = 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

W równaniach (2.12) i (2.13) wprowadzono następujące zmienne bezwymiarowe

$$K = \frac{kIR}{c_0}, \quad c_1^* = \frac{c_1}{c_0}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{c_0}, \tag{2.14}$$

$$P^* = \frac{PR}{c_0}, \quad a = \frac{c_2}{c_1}, \quad b = \frac{c_3}{c_1},$$

$$\kappa_0 = 1 + 2\lambda(\sin \varphi + \sin \psi - \sin \alpha_{10} - \sin \alpha_{20}), \tag{2.15}$$

$c_1^*$  jest bezwymiarową sztywnością przegubu w miejscu zamocowania, natomiast  $\xi^*$  bezwymiarowym parametrem charakteryzującym sposób zamocowania.

Małe drgania układu opisują równania różniczkowe drugiego rzędu otrzymane przez przyrównanie do zera współczynników przy  $\in$

$$mR^2 [\ddot{\alpha}_{11} + \cos(\alpha_{10} - \alpha_{20})\ddot{\alpha}_{21}] - kIR[\kappa_1 \cos \alpha_{10} + (1 - \kappa_0) \sin \alpha_{10}(\alpha_{11} + \gamma_1)] + c\alpha_{11} - c_2(\alpha_{21} - \alpha_{11}) + c_3 \frac{\lambda \sin \alpha_{10}}{\kappa_0} (\alpha_{21} - \alpha_{41} + 2\gamma_1) - PR \cos \alpha_{10} \cdot \alpha_{11} = 0, \quad (2.16)$$

$$mR^2 [\ddot{\alpha}_{21} + \cos(\alpha_{10} - \alpha_{20})\ddot{\alpha}_{11}] - kIR[\kappa_1 c \cos \alpha_{20} + (1 - \kappa_0) \sin \alpha_{20}(\alpha_{21} + \gamma_1)] + c_2(\alpha_{21} - \alpha_{11}) + c_3 \left[ (\alpha_{21} + \gamma_1) + \frac{\lambda \sin \alpha_{20}}{\kappa_0} (\alpha_{21} - \alpha_{41} + 2\gamma_1) \right] - PR \cos \alpha_{20} \cdot \alpha_{21} = 0 \quad (2.17)$$

$$mR^2 [\ddot{\alpha}_{31} + \cos(\alpha_{10} - \alpha_{20})\ddot{\alpha}_{41}] - kIR[\kappa_1 \cos \alpha_{10} + (1 - \kappa_0) \sin \alpha_{10}(\alpha_{31} - \gamma_1)] + c\alpha_{31} - c_2(\alpha_{41} - \alpha_{31}) + c_3 \frac{\lambda \sin \alpha_{10}}{\kappa_0} (\alpha_{41} - \alpha_{21} - 2\gamma_1) - PR \cos \alpha_{10} \cdot \alpha_{31} = 0, \quad (2.18)$$

$$mR^2 [\ddot{\alpha}_{41} + \cos(\alpha_{10} - \alpha_{20})\ddot{\alpha}_{31}] - kIR[\kappa_1 \cos \alpha_{20} + (1 - \kappa_0) \sin \alpha_{20}(\alpha_{41} - \gamma_1)] + c_2(\alpha_{41} - \alpha_{31}) + c_3 \left[ (\alpha_{41} - \gamma_1) + \frac{\lambda \sin \alpha_{20}}{\kappa_0} (\alpha_{41} - \alpha_{21} - 2\gamma_1) \right] - PR \cos \alpha_{20} \cdot \alpha_{41} = 0, \quad (2.19)$$

$$\kappa_1 = -\lambda [\cos \alpha_{10}(\alpha_{11} + \alpha_{31}) + \cos \alpha_{20} \cdot (\alpha_{21} + \alpha_{41})], \quad (2.20)$$

Aby rozdzielić powyższy układ czterech równań na dwa układy dwóch równań, z których jeden opisywał będzie drgania według formy symetrycznej a drugi według formy antymetrycznej odejmujemy i dodajemy stronami odpowiednio równania (2.16) (2.18) oraz (2.17) (2.19) a następnie podstawiamy

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + \alpha_{31} &= A_1 e^{i\omega t}, \\ \alpha_{11} - \alpha_{31} &= A_2 e^{i\omega t}, \\ \alpha_{21} + \alpha_{41} &= A_3 e^{i\omega t}, \\ \alpha_{21} - \alpha_{41} &= A_4 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Przyrównując do zera wyznaczniki uzyskanych w ten sposób jednorodnych układów równań otrzymujemy dwa równania kwadratowe. I tak pierwiastkami równania

$$\begin{aligned} &\Omega^2 \sin^2(\alpha_{10} - \alpha_{20}) + \Omega \left\{ K[(1 - \kappa_0)(\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20}) - \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda(\cos^2 \alpha_{20} + \cos^2 \alpha_{10})] + P^*(\cos \alpha_{20} + \cos \alpha_{10}) - \right. \\ &\quad \left. - c_1^* \left[ \frac{\xi^*}{c_1^* + \xi^*} + 2a + b \right] + 2\cos(\alpha_{10} - \alpha_{20})(2\lambda K \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{20} - \right. \\ &\quad \left. - ac_1^*) \right\} + \left\{ K[(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{10} - 2\lambda \cos^2 \alpha_{10}] - c_1^* \left( \frac{\xi^*}{c_1^* + \xi^*} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a \right) + P^* \cos \alpha_{10} \right\} \left\{ K[(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{20} - 2\lambda \cos^2 \alpha_{20}] - \right. \\ &\quad \left. - c_1^*(a + b) + P^* \cos \alpha_{20} \right\} - (2\lambda K \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{20} - c_1^* a)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

są częstości drgań symetrycznych, natomiast pierwiastkami równania

$$\begin{aligned}
 & \Omega^2 \sin^2(\alpha_{10} - \alpha_{20}) + \Omega \left\{ K(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{10} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{10} \right) - \right. \\
 & \quad - c_1^* \left( \frac{\xi^*}{c_1^* + \xi^*} + a \right) - c_1^* b \frac{4\lambda^2}{\kappa_0^2} \sin^2 \alpha_{10} + P^* \cos \alpha_{10} + \\
 & \quad + K(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{20} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{20} \right) - c_1^* (a + b) - \\
 & \quad - c_1^* b \frac{4\lambda \sin \alpha_{20}}{\kappa_0} \left( 1 + \frac{\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{20} \right) + P^* \cos \alpha_{20} - 2 \cos(\alpha_{10} - \alpha_{20}) \times \\
 & \quad \times \left[ K \frac{2\lambda(1 - \kappa_0)}{\kappa_0} \sin \alpha_{10} \sin \alpha_{20} + c_1^* a - c_1^* b \frac{2\lambda \sin \alpha_{10}}{\kappa_0} \left( 1 + \frac{2\lambda \sin \alpha_{20}}{\kappa_0} \right) \right] \Bigg\} \\
 & + \left\{ \left[ K(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{10} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{10} \right) - c_1^* \left( \frac{\xi^*}{c_1^* + \xi^*} + a \right) - c_1^* b \frac{4\lambda^2}{\kappa_0^2} \sin^2 \alpha_{10} + \right. \right. \\
 & \quad + P^* \cos \alpha_{10} \Bigg] \left[ K(1 - \kappa_0) \sin \alpha_{20} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{20} \right) - c_1^* (a + b) - \right. \\
 & \quad - c_1^* b \frac{4\lambda \sin \alpha_{20}}{\kappa_0} \left( 1 + \frac{\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{20} \right) + P^* \cos \alpha_{20} \Bigg] - \\
 & \quad \left. - \left[ K \frac{2\lambda(1 - \kappa_0)}{\kappa_0} \sin \alpha_{10} \sin \alpha_{20} + c_1^* a - c_1^* b \frac{2\lambda \sin \alpha_{10}}{\kappa_0} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\kappa_0} \sin \alpha_{20} \right) \right]^2 \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

częstości drgań antymetrycznych.

### 3. Sformułowanie problemu optymalizacji oraz metoda rozwiązania

Problem optymalizacji formułujemy następująco. Poszukujemy takiego rozkładu masy układu (takich wartości sztywności przegubów), który przy założonej stałej objętości zapewni maksimum siły krytycznej dla  $\Omega = \text{const}$  lub maksimum podstawowej częstości drgań dla  $P = \text{const}$

Warunek stałej objętości przedstawia równanie

$$V = 2 \frac{A_1 + A_2}{2} R + 2 \frac{A_2 + A_3}{2} R + A_3 l = \text{const}, \tag{3.1}$$

lub po wykorzystaniu (2.1) i (2.14)

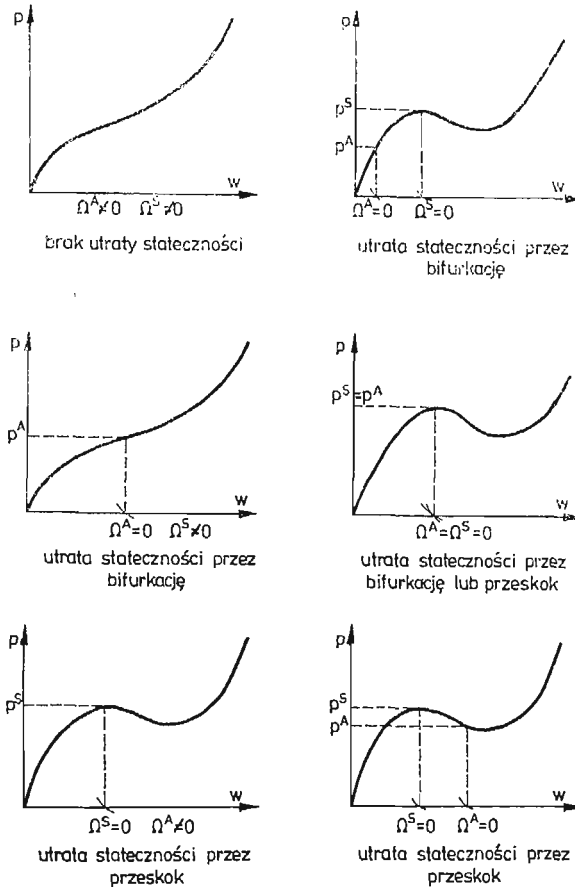
$$c_1^v [(1 + 2a^v + b^v) \lambda + b^v] = \frac{V}{l} = c_0^v = \text{const}. \tag{3.2}$$

Dla ustalonych wartości  $a$ ,  $b$  z równania tego możemy wyznaczyć

$$c_1^* = [(1 + 2a^v + b^v) \lambda + b^v]^{-\frac{1}{v}}. \tag{3.3}$$

Praktycznie więc problem optymalizacji sprowadza się do znalezienia takich wartości  $a$  oraz  $b$ , które zapewnią spełnienie przyjętego kryterium.

Do rozwiązania tak postawionego problemu zastosujemy bardzo prostą metodę (nie wymagającą stosowania złożonych procedur numerycznych) pozwalającą w szybki sposób otrzymać rozwiązanie. Dla ustalonych wart ościparametrów  $a, b$  budujemy rodzinę wykresów  $P^*, \Omega^s, \Omega^A$  w funkcji statycznego ugięcia  $w$ , otrzymując wartości siły  $P^*$  z równań (2.12) (2.13) natomiast częstości drgań symetrycznych  $\Omega^s$  i antymetrycznych  $\Omega^A$  odpowiednio z równań (2.22) (2.23)



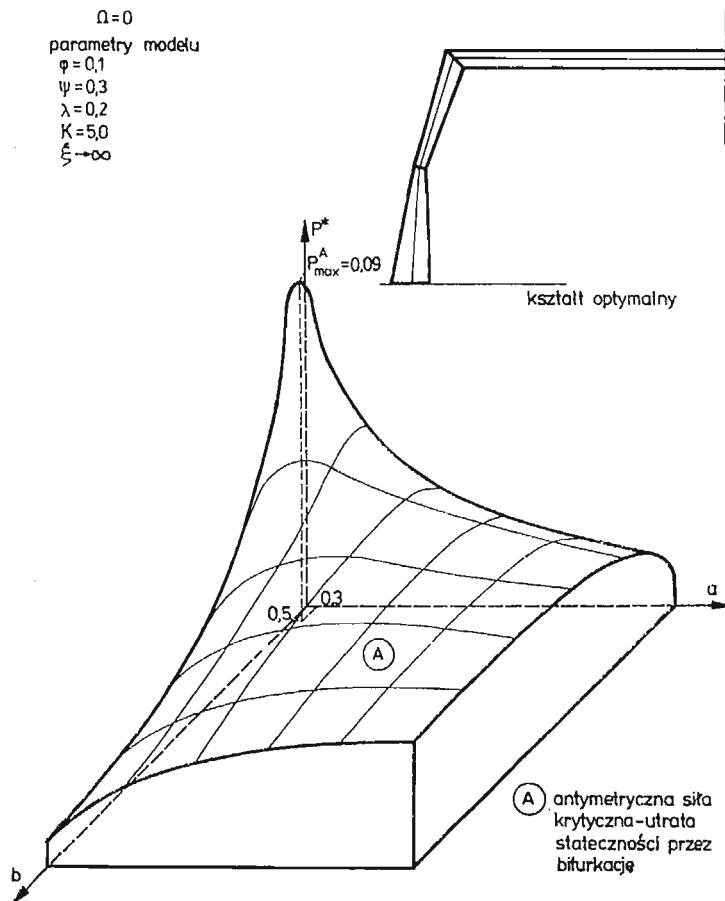
Rys. 3

W przypadku badania stateczności układu ( $\Omega = 0$ ) wartości sił krytycznych odpowiadających przeskokowi bądź bifurkacji odczytujemy z wykresu dla rzędnych  $w$  odpowiadających  $\Omega^s = 0$  lub  $\Omega^A = 0$ . Możliwe przypadki przedstawia rys. 3. Znajdując w ten sposób wartości sił krytycznych dla różnych kombinacji parametrów  $a, b$  możemy zbudować powierzchnię stateczności  $P_{kr}^* = f_1(a, b)$ . Wartości  $a$  oraz  $b$  dla których  $P_{kr}^*$  osiąga maksimum są zgodnie z przyjętym kryterium poszukiwanymi wartościami optymalnymi. Analogicznie postępujemy przy rozważaniu drgań układu. Z wykresu dla  $P^* = \text{const}$  odczytujemy  $\Omega^s, \Omega^A$  przy czym optymalizowana jest wartość niższa. Dla różnych kombinacji

$a$ ,  $b$  oraz odpowiadających im wartości podstawowej częstości drgań budujemy powierzchnię  $\Omega = f_2(a, b)$ . Optymalne wartości  $a$ ,  $b$  otrzymujemy dla maksymalnej wartości podstawowej częstości drgań.

#### 4. Analiza wyników

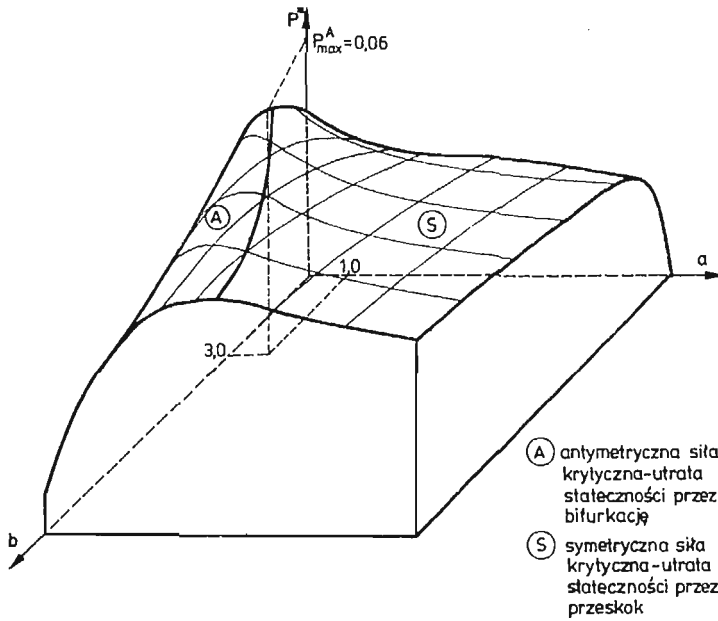
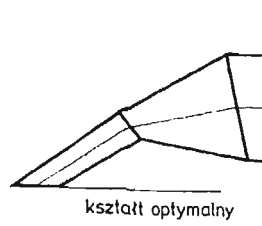
Opisaną w rozdziale poprzednim metodę zastosowano do znalezienia optymalnego kształtu rozważanego modelu. Dla danych parametrów geometrycznych sporządzone zostały wykresy  $P_{kr}^* = f_1(a, b)$  lub  $\Omega = f_2(a, b)$  i na ich podstawie znalezione optymalne wartości  $a$ ,  $b$ . Uzyskane powierzchnie oraz kształty przedstawiono na rys. 4, 5, 6. Na rys. 5 oraz 6 na powierzchniach wyodrębniono obszary, dla których podstawowa (najniższa) jest symetryczna (antymetryczna) siła krytyczna (częstość drgań). Możemy wyciągnąć wniosek, że nie jest możliwe kształtowanie układu tylko z uwagi na jedną siłę krytyczną (częstość drgań) — czyli, że dla pewnych parametrów geometrycznych modelu jednomodalne sformułowanie problemu optymalizacji jest niewystarczające. Punkty leżące na krzywych



Rys. 4

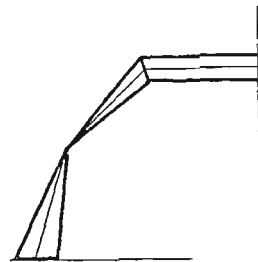


$\Omega = 0$   
 parametry modelu  
 $\varphi = 1,0$   
 $\psi = 1,4$   
 $\lambda = 2,0$   
 $K = 1,0$   
 $\xi \rightarrow \infty$

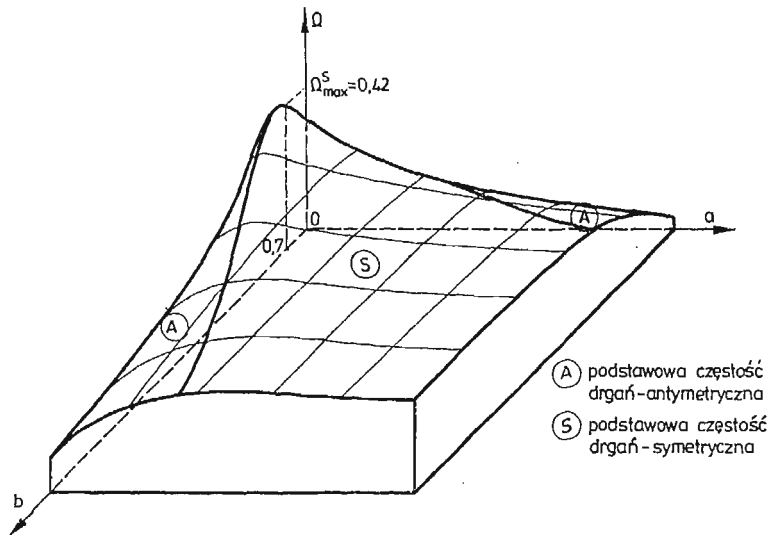


Rys. 5

$P^* = 0$   
 parametry modelu  
 $\varphi = 0,3$   
 $\psi = 0,8$   
 $\lambda = 0,5$   
 $\kappa = 0,2$   
 $\xi \rightarrow \infty$

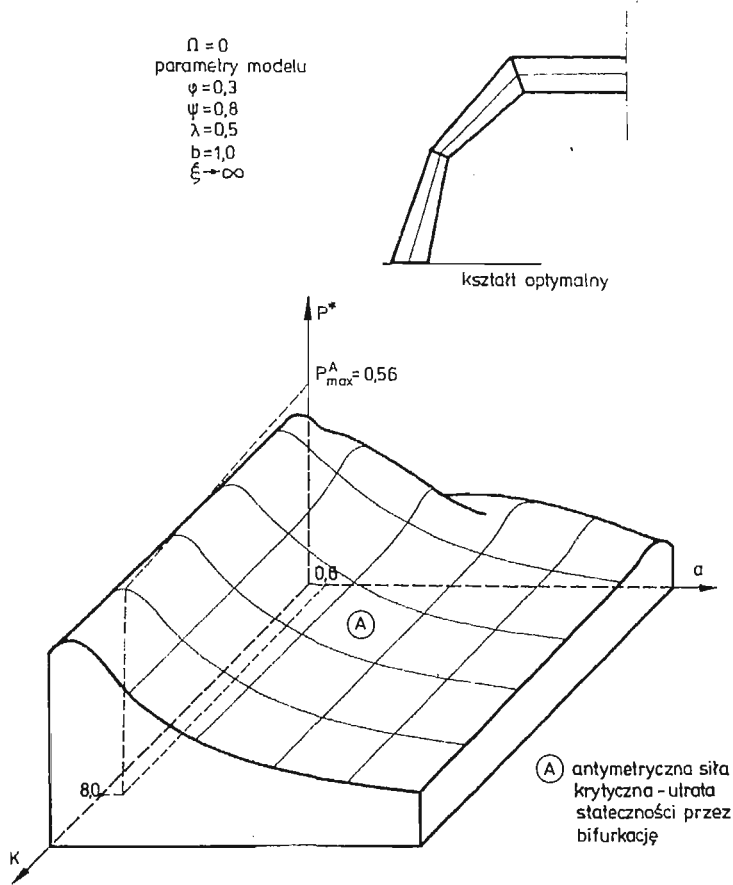


kształt optymalny



- (A) podstawowa częstość drgań - antymetryczna
- (S) podstawowa częstość drgań - symetryczna

Rys. 6



Rys. 7

rozgraniczających obszary są geometryczną ilustracją wyniku optymalizacji dwumodalnej dla tych punktów wartości sił krytycznych (częstości drgań) odpowiadających formie symetrycznej i antymetrycznej są równe sobie.

We wszystkich omówionych przykładach zmiennymi optymalizacji były wartości  $a$ ,  $b$ . Możliwe jest oczywiście przyjęcie innych zmiennych i tak rys. 7 przedstawia rezultat poszukiwania optymalnych wartości  $a$  oraz  $K$  przy ustalonej wartości parametru  $b$ .

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. BŁACHUT, A. GAJEWSKI, *On unimodal and bimodal optimal design of funicular arches*, Int. J. Solids Struct. 17, 653 - 667 (1981).
2. J. BŁACHUT, A. GAJEWSKI, *Unimodal and bimodal optimal design of extensible arches with respect to buckling and vibrations*, Optimal Control Appl. & Meth. vol. 2, 384 - 402 (1981).
3. B. BOCHENEK, A. GAJEWSKI, *Jednomodalna i dwumodalna optymalizacja ramy portalowej*, Rozpr. Inż. 1, 30 (1981).
4. B. BOCHENEK, A. GAJEWSKI, *Jednomodalna i dwumodalna optymalizacja ściskanych prętów drgających*, Mech. Teor. i Stos. 22, 1/2 (1984).

5. A. GAJEWSKI, *A note on unimodal and bimodal optimal design of vibrating compressed columns*, Int. J. Mech. Sci. 23, 11 - 16 (1981).
6. J. KJUSALAAS, *Optimal design of structures with buckling constraints*, Int. J. Solids Struct. 9, 7 863 - 878 (1973).
7. A. D. KERR, M. T. SOIFER, *The linearization of the prebuckling state and its effect on the determined instability loads*, J. Appl. Mech. 775 - 783 (1969).
8. E. F. MASUR, Z. MRÓZ, *Singular solutions in structural optimization problems*, IUTAM Conf. Northwestern Univer. (1978).
9. N. OLHOFF, S. H. RASMUSSEN, *On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns*, Int. J. Solids Struct. 13, 605 - 616 (1977).
10. N. OLHOFF, R. H. PLAUT, *Bimodal optimization of vibrating shallow arches*, DCAMM Rep. No. 242 (1982).
11. S. PRAGER, W. PRAGER, *A note on optimal design of columns*, Int. J. Mech. Sci. 21, 249 - 251 (1979).

## Р е з ю м е

## ОПТИМИЗАЦИЯ АРКИ СО СЖИМАЕМОЙ ОСЬЮ

Настоящая работа, с целью представления характерных черт оптимизации арки со сжимаемой осью, заменяет действительную арку прямой стержневой системой с четырьмя степенями свободы. Исследовались разные формы потери устойчивости (перекрытие, бифуркация) путем испытания частоты малых линейных колебаний наложенных на нелинейный статический прогиб системы.

Формулирована и решена проблема оптимизации состоящая в поисках такой формы системы, которая при постоянном объеме даст максимум критической силы или частоты колебаний. Для некоторых геометрических параметров модели доказана нехватка одномодальной формулировки проблемы оптимизации.

## S u m m a r y

## OPTIMIZATION OF AN ARC WITH COMPRESSIBLE AXIS

In order to present the characteristic features of the optimization of an arc with compressible axis the arc has been replaced by a bar system of four degrees of freedom. Various forms of the lack of stability have been obtained (snap, bifurcation) by investigation of the frequency of small linear vibrations imposed on nonlinear static deflection of the system.

The optimization of the form of the system has been formulated and solved such that for conserved constant volume the maximum of the critical force or that of the vibration frequency is assured. It has been proved that for certain geometrical parameters of the model a single modal formulation of the optimization problem is insufficient.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 grudnia 1982 roku*