

## JEDNOMODALNA I DWUMODALNA OPTIMALIZACJA ŚCISKANYCH PRĘTÓW DRGAJĄCYCH<sup>1)</sup>

BOHDAN BOCHENEK

*Politechnika Krakowska*

ANTONI GAJEWSKI

*Politechnika Krakowska*

### 1. Uwagi wstępne

Do niedawna w pracach dotyczących optymalizacji drgających i narażonych na utratę stateczności elementów konstrukcji, kształtowanie przeprowadzane było jedynie z uwagi na wybraną pojedynczą wartość własną (częstość drgań, siłę krytyczną). Jednak w wielu przypadkach takie sformułowanie (jednomodalne) okazuje się niewystarczające. Ma to miejsce wtedy, gdy element ukształtowany z uwagi na początkowo najniższą wartość własną, związaną z pewną określoną formą drgań lub wyboczenia, posiada niższą wartość drugiej wartości własnej, związanej z inną formą drgań lub wyboczenia. Należy wówczas stosować dwumodalne sformułowanie problemu optymalizacji, polegające na optymalnym kształtowaniu z uwagi na podwójną wartość własną, związaną równocześnie z dwiema formami drgań (lub wyboczenia).

Konieczność zastosowania takiego sformułowania została zauważona po raz pierwszy w pracy N. OLHOFFA i S. H. RASMUSSENA [1], w której znaleziono optymalny kształt obustronnie, sztywnie utwierdzonego pręta ściskanego siłą osiową.

Sformułowanie dwumodalne staje się z reguły konieczne w przypadku optymalizacji łuków drgających i narażonych na utratę stateczności; szereg rozwiązań dotyczących sprężystych łuków, znajdujących się w bezmomentowym stanie przedwyboczeniowym o osi nierozciągliwej, otrzymano w pracy J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [2]. Podobna sytuacja pojawia się w przypadku prostej ramy portalowej ściskanej siłami skupionymi działającymi w kierunku osi nieodkształconych słupów. Zwrócili na to uwagę E. F. MASUR i Z. MRÓZ [3], którzy przedstawili proste przybliżone rozwiązanie dla pręta i ramy portalowej, złożonej z elementów o przekrojach sandwiczowych. Kompletnie rozwiązanie zagadnienia jednomodalnej i dwumodalnej optymalizacji ze względu na wyboczenie sprężystej ramy portalowej, złożonej z elementów o zmiennych przekrojach (w sposób ciągły lub skokowy) zawarte jest w pracy B. BOCHENKA i A. GAJEWSKIEGO [4].

Charakterystyczne cechy zjawiska optymalizacji dwumodalnej przedstawiono również

<sup>1</sup> Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego PW. 05-12.

w pracy S. PRAGERA i W. PRAGERA [5] na przykładzie modelu pręta ściskanego, składającego się z kilku sztywnych prętów, połączonych ze sobą oraz z podporami za pomocą sprężystych przegubów. Model ten został również wykorzystany w pracy A. GAJEWSKIEGO [6] w celu zademonstrowania dwumodalnej optymalizacji pręta ściskanego z uwagi na podstawową częstość jego drgań poprzecznych. Zawiera ona również sformułowanie (jednak bez szczegółowych obliczeń) problemu jedno- i dwumodalnej optymalizacji rzeczywistego pręta ściskanego.

W końcu należy zauważyć, że w pracy J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [7] podjęto próbę wykorzystania dwumodalnego sformułowania optymalizacji w niekonserwatywnych problemach stateczności w celu znalezienia optymalnego kształtu pręta ściskanego siłą śledzącą.

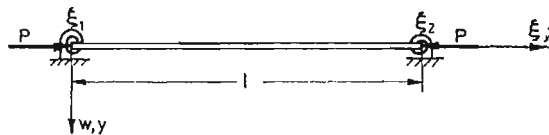
Celem niniejszej pracy jest szczegółowe rozwiązanie zagadnienia (sformułowanego w pracy [6]) optymalizacji kształtu pręta ściskanego, obustronnie sprężyste utwierdzonego, z uwagi na podstawową częstość jego drgań poprzecznych. Zagadnienie to mieści się, jako przypadek szczególny, w ogólnym sformułowaniu problematyki optymalnego kształtowania drgających prętów ściskanych, przedstawionym w pracy J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [7] oraz W. G. GRINIEWA i A. P. FILIPPOWA [8].

W celu ułatwienia czytania pracy przytoczymy tu podstawowe wyprowadzenia wzorów, jednak tylko w odniesieniu do badanego szczególnego przypadku.

## 2. Sformułowanie zagadnienia

**2.1. Równania stanu i warunki brzegowe.** W niniejszej pracy rozważamy drgania pręta obustronnie sprężyste utwierdzonego, ściskanego stałą siłą osiową  $P$ , przedstawionego na rys. 1. Całkowita objętość pręta o długości  $l$  jest równa  $V$ . Załóżmy, że w każdym przekroju poprzecznym obowiązuje następująca zależność między momentem bezwładności i polem powierzchni przekroju:

$$I(\xi) = \bar{c}[A(\xi)]^\nu, \quad (2.1)$$



Rys. 1

gdzie  $\bar{c}$  jest pewną stałą a wykładnik  $\nu$  przyjmuje, w najczęściej spotykanych przypadkach, wartości 1,2 lub 3 ( $\nu = 1$  dla płaskozbieżnych prętów o stałej wysokości przekroju,  $\nu = 2$  dla prętów wszechstronnie równomiernie zbieżnych,  $\nu = 3$  dla płasko-zbieżnych prętów o stałej szerokości). Gdy  $\nu = 2$ , stała  $\bar{c} = 1/12$  dla kwadratu lub  $\bar{c} = 1/4\pi$  dla koła.

Równanie różniczkowe małych drgań poprzecznych pręta ściskanego:

$$[EI(\xi)w''']' + Pw'' + \rho A(\xi)\ddot{w} = 0, \quad (2.2)$$

po rozdzieleniu zmiennych czasowej i przestrzennej za pomocą przedstawienia:

$$w = v(\xi)e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

oraz wprowadzeniu następujących stałych i zmiennych bezwymiarowych:

$$\begin{aligned} x &= \xi/l, & y(x) &= v(x)/l, & \Phi(x) &= A(x)/A_0, \\ \beta &= \frac{Pl^{\nu+2}}{cEV^{\nu}}, & \Omega &= \frac{\rho l^{\nu+3}}{cEV^{\nu-1}} \omega^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

możemy przedstawić w formie układu równań stanu:

$$\begin{cases} y'_i = \varphi_i, \\ \varphi'_i = -\frac{m_i}{\Phi^{\nu}}, \\ m'_i = q_i + \beta \varphi_i, \\ q'_i = -\Omega_i \Phi y_i. \end{cases} \quad (2.5)$$

Wielkości wymiarowe, występujące w związkach (2.4) oznaczają:  $\xi$  — zmienną niezależną, mierzoną wzdłuż nieodkształconej osi pręta,  $w(\xi, t)$  — ugięcie pręta w punkcie  $\xi$  w chwili  $t$ ,  $P$  — ściskającą siłę osiową,  $E$  — moduł Younga,  $\omega$  — częstość drgań,  $\rho$  — gęstość materiału pręta.  $\beta$  — oznacza tu bezwymiarową siłę ściskającą, a  $\Omega$  — bezwymiarowy kwadrat częstości drgań.

W procesie optymalizacji będą interesowały nas dwie pierwsze wartości własne (częstość lub siły krytyczne) oraz odpowiadające im zmienne stanu (istotne jest przy tym ich rozróżnienie). Dlatego też w równaniach (2.5) wprowadzono wskaźnik „ $i$ ”, który wskazuje na zmienne stanu związane odpowiednio z pierwszą lub drugą wartością własną:  $i = 1$  lub  $2$ .

Przekrój odniesienia  $A_0$  został tu zdefiniowany następująco:

$$A_0 = V/l, \quad (2.6)$$

wobec czego bezwymiarowa funkcja  $\phi(x)$ , określająca przekrój poprzeczny pręta musi spełniać warunek unormowania:

$$\int_0^1 \phi(x) dx = 1. \quad (2.7)$$

Do układu równań (2.5) należy dołączyć odpowiednie warunki brzegowe. W dalszym ciągu wyróżniamy dwa przypadki szczególne: a. symetryczne zamocowanie końców pręta.

W takim przypadku całkowanie równań (2.5) wystarczy przeprowadzić w przedziale  $(0, 1/2)$  a warunki brzegowe zadać dla  $x = 0$  oraz  $x = 1/2$ . Formę drgań związaną z pierwszą wartością własną (symetryczną) wyznaczają wtedy następujące warunki ( $i = 1$ ):

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0, & \varphi_1(1/2) &= 0, \\ m_1(0) + \frac{1}{\xi} \varphi_1(0) &= 0, & q_1(1/2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

natomiast dla drugiej formy drgań (antymetrycznej,  $i = 2$ ):

$$\begin{aligned} y_2(0) &= 0, & y_2(1/2) &= 0, \\ m_2(0) + \frac{1}{\xi} \varphi_2(0) &= 0, & m_2(1/2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

b. niesymetryczne zamocowanie końców pręta.

W tym przypadku całkowanie przeprowadzamy dla  $x \in (0, 1)$  i nie mamy możliwości rozróżnienia form drgań poprzez zadanie odpowiednich warunków brzegowych. Warunki brzegowe dla obu form drgań są takie same:

$$y_i(0) = 0, \quad y_i(1) = 0, \\ m_i(0) + \frac{1}{\xi_1} \varphi_1(0) = 0, \quad m_i(1) + \frac{1}{\xi_2} \varphi_1(1) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.10)$$

natomiast rozróżnienie form drgań następuje poprzez liczbę miejsc zerowych linii ugięcia (linia ugięcia odpowiadająca pierwszej wartości własnej nie ma miejsc zerowych a odpowiadająca drugiej ma jedno miejsce zerowe). Występujące w związkach (2.8), (2.9), (2.10) parametry  $\xi$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , charakteryzują zamocowanie końców pręta. Gdy parametry te są równe zero wówczas końce pręta są sztywnie utwierdzone, gdy natomiast zmierzają do nieskończoności pręt jest przegubowo zamocowany.

**2.2. Warunek konieczny optymalności.** Problem polega na znalezieniu funkcji  $\Phi(x)$  spełniającej równania stanu (2.5), warunki brzegowe (2.8), (2.9) albo (2.10), warunek unormowania (2.7), geometryczne warunki ograniczające:

$$\phi_0 \leq \phi \leq \phi_1, \quad (2.11)$$

która minimalizuje objętość przy ustalonej częstotliwości drgań lub, w sformułowaniu dualnym, maksymalizuje częstotliwość drgań przy stałej objętości.

**2.2.1. Optymalizacja jednomodalna  $i = 1$  albo  $i = 2$ .** Warunek konieczny dla ekstremum funkcjonału objętości pręta wyprowadzimy w oparciu o teorię sterowania optymalnego, wykorzystując „zasadę maksimum” Pontriagina. Wprowadzając dodatkową zmienną stanu  $y_0(x)$ , spełniającą warunki:

$$y_0'(x) = \Phi(x), \quad y_0(1) = 1, \quad y_0(0) = 0, \quad (2.12)$$

oraz wektor stanu sprzężonego:

$$\phi = (\psi_{y_1}, \psi_{\varphi_1}, \psi_{m_1}, \psi_{q_1}, \psi_0), \quad (2.13)$$

otrzymamy Hamiltonian w następującej postaci:

$$H = \psi_{y_1} \varphi_1 + \psi_{\varphi_1} (-m_1 / \phi^v) + \psi_{m_1} (q_1 + \beta \varphi_1) + \\ + \psi_{q_1} (-\Omega_1 \phi y_1) + \psi_0 \phi, \quad i = 1 \quad \text{albo} \quad i = 2. \quad (2.14)$$

Układ równań sprzężonych:

$$\psi_{y_1}' = \Omega_1 \phi \psi_{q_1}, \quad \psi_{m_1}' = \psi_{\varphi_1} / \phi^v \\ \psi_{\varphi_1}' = -\psi_{y_1} - \beta \psi_{m_1}, \quad \psi_{q_1}' = -\psi_{m_1}, \quad (2.15)$$

może być w naszym przypadku sprowadzony do równań stanu za pomocą podstawień:

$$\psi_{y_1} = k q_1, \quad \psi_{m_1} = k \varphi_1, \quad \psi_{\varphi_1} = -k m_1, \quad \psi_{q_1} = -k y_1, \quad (2.16)$$

w którym  $k$  jest dowolną stałą różną od zera. Również odpowiednie warunki brzegowe, wyznaczone z warunków transwersalności przyjmują identyczną postać z równaniami (2.8), (2.9), (2.10). Mówimy wówczas, że układ równań stanu jest samosprężony w silnym sensie a hamiltonian (2.14) przyjmuje postać:

$$H = k(2q_1 \varphi_1 + m_1^2 / \phi^v + \beta \varphi_1^2 + \Omega_1 \phi y_1^2) + \psi_0 \phi. \quad (2.17)$$

Poszukiwany warunek konieczny optymalności jest warunkiem ekstremum hamiltonianu (2.17) względem zmiennej sterowania;  $\partial H/\partial \phi = 0$ ;

$$\phi(x) = \left( \frac{m_i^2}{\lambda + \Omega_i y_i^2} \right)^{1/(1+\nu)}, \quad \text{gdzie: } \lambda = \psi_0/k, \quad i = 1, 2. \quad (2.18)$$

**2.2.2.** Optymalizacja dwumodalna  $i = 1, 2$ . W tym przypadku dopuszczamy możliwość równoczesnego wystąpienia obu form wyboczenia, odpowiadających tej samej wartości własnej — częstości drgań  $\Omega$ . Hamiltonian po uwzględnieniu własności samosprężenia przyjmuje postać:

$$H = \sum_{i=1}^2 k_i (2q_i \varphi_i + m_i^2 / \phi^\nu + \beta q_i^2 + \Omega_i \phi y_i^2) + \psi_0 \phi \quad (2.19)$$

gdzie  $k_1$  i  $k_2$  są dowolnymi stałymi różnymi od zera.

Warunek ekstremum hamiltonianu (2.19) prowadzi do następującego warunku optymalności:

$$\phi(x) = \left\{ \frac{\nu[(1-\mu)m_1^2 + \mu m_2^2]}{\lambda + (1-\mu)\Omega_1 y_1^2 + \mu\Omega_2 y_2^2} \right\}^{1/(1+\nu)} \quad (2.20)$$

gdzie wprowadzono nowe stałe:

$$\lambda = \psi_0/(k_1 + k_2), \quad \mu = k_2/(k_1 + k_2). \quad (2.21)$$

Stałą  $\lambda$  dobieramy tak aby spełniony był warunek unormowania (2.7), a stałą  $\mu$  tak, aby częstość drgań otrzymana w rozwiązaniu układu (2.5) dla  $i = 1$  była równa częstości otrzymanej z rozwiązania tego układu dla  $i = 2$ .

### 3. Metoda rozwiązania zagadnienia

Poszukiwanie optymalnego kształtu pręta opiera się na iteracyjnej metodzie numerycznej szeroko stosowanej przez W. B. GRINIEWA i A. P. FILIPPOWA [9] i wykorzystywanej również w pracach J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [2], [7]. Schemat obliczeń zależy od rodzaju optymalizacji.

a. Optymalizacja jednomodalna.

Zakładamy wstępnie  $\phi^{(0)} = 1$  (pręt pryzmatyczny). Następnie całkujemy układ równań (2.5) z odpowiednimi warunkami brzegowymi i wyznaczamy odpowiednią częstość drgań. Z warunku optymalności (2.18) i z warunków (2.7), (2.11) określamy poprawiony kształt  $\phi^{(1)}$ , który podstawiamy do układu (2.5) i powtórnie całkujemy. Gdy wartości częstości otrzymane w dwóch kolejnych powtórzeniach procesu będą (z przyjętą dokładnością) bliskie sobie proces kończymy.

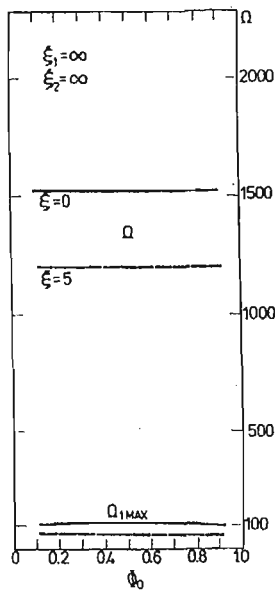
b. Optymalizacja dwumodalna.

Zakładając początkową postać funkcji  $\Phi^{(0)}$  całkujemy układ równań (2.5) dla  $i = 1$ , a następnie dla  $i = 2$  oraz wyznaczamy odpowiednie częstości  $\Omega_1^{(0)}$ ,  $\Omega_2^{(0)}$ . Przyjmując pewną wartość  $\mu$  wyznaczamy z warunku optymalności (2.20) poprawioną funkcję  $\Phi^{(1)}$ , którą podstawiamy do równań stanu i powtórnie całkując otrzymujemy częstości (na

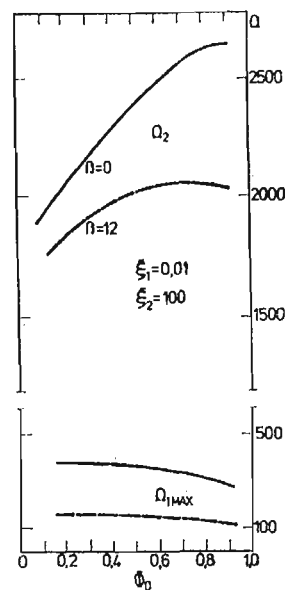
ogół różne od siebie). Odpowiedni dobór wartości  $\mu$  pozwala zrównać częstości w danej iteracji. Kolejne iteracje kończymy gdy podwójna częstość w danej iteracji nie różni się (z przyjętą dokładnością) od podwójnej częstości w iteracji poprzedniej.

#### 4. Analiza wyników

Opisane powyżej metody zastosowano do przykładowych obliczeń w przypadku pręta równomiernie wszechstronnie zbieżnego, tzn. dla:  $\nu = 2$ . Dla różnych wartości  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  oraz  $\beta$  znalezione zostały optymalne kształty i odpowiadające im częstości drgań. Ponadto w każdym z przypadków zmieniano dolne ograniczenie geometryczne  $\phi_0 = \phi_1$  w przedziale (0, 1). Rezultaty obliczeń przedstawiają rysunki 2, 3, 5, 6, 8, 9, na których oznaczono:  $\Omega_{1\max}$  — maksymalną częstość odpowiadającą pierwszej formie drgań,  $\Omega_2$  — doliczoną do otrzymanego optymalnego kształtu częstość odpowiadającą drugiej formie drgań. Na Rys. 4, 7, 10 przedstawiono optymalne kształty dla wybranych wartości ograniczenia  $\Phi_0$ , odpowiadające pierwszej formie drgań.

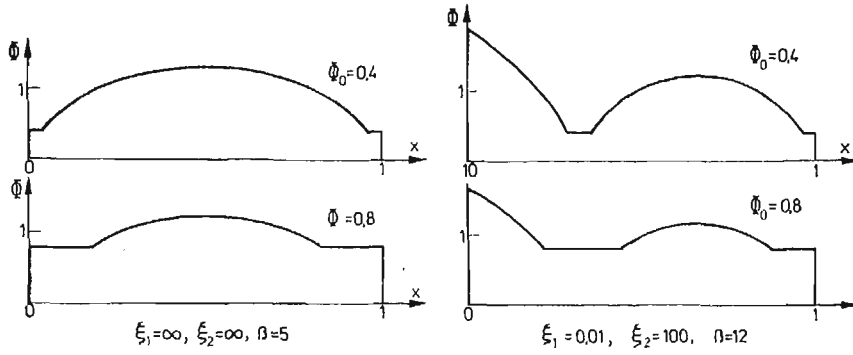


Rys. 2

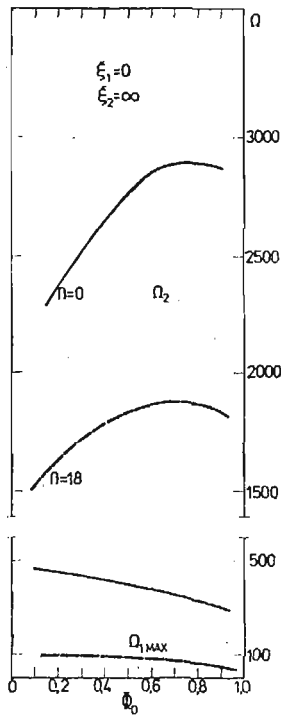


Rys. 3

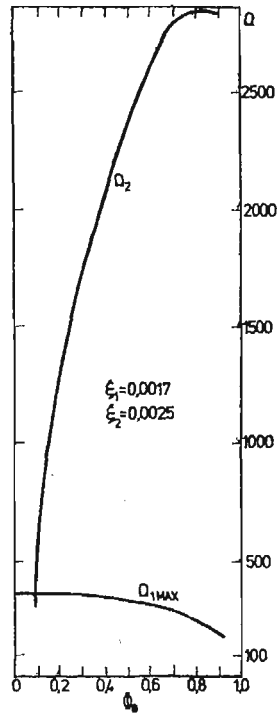
Okazuje się jednak, że dla pewnych przypadków, przedstawionych na Rys. 6, 8, 9 krzywe  $\Omega_{1\max}(\Phi_0)$  i  $\Omega_2(\Phi_0)$  przecinają się. Dla ograniczeń mniejszych od ograniczenia odpowiadającego punktowi przecięcia, otrzymane kształty nie mogą być traktowane jako optymalne [1] [6]. Zachodzi wtedy konieczność zastosowania optymalizacji dwumodalnej. Graniczny przypadek zamocowania końców pręta  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  (pręt obustronnie sztywnie utwierdzony) jest analizowany bardziej szczegółowo. Rys. 9 przedstawia pary krzywych  $\Omega_{1\max}$ ,  $\Omega_2$  dla różnych wartości  $\beta$ ; dodatkowo naniesiono krzywą przedstawiającą za-



Rys. 4

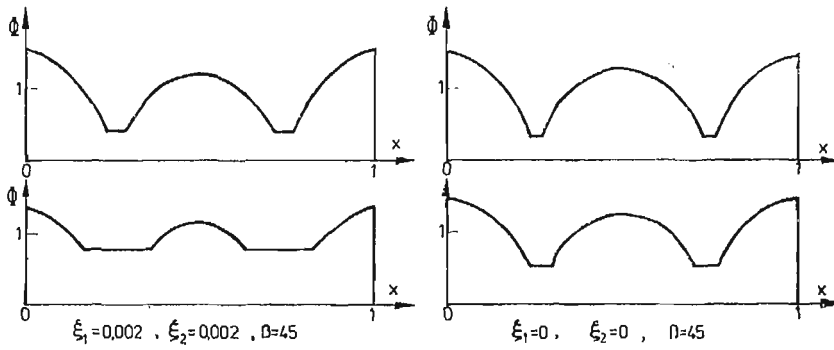


Rys. 5

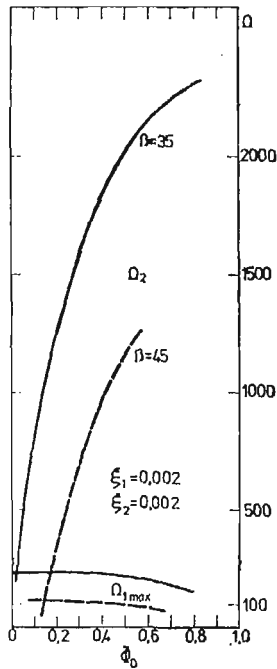


Rys. 6

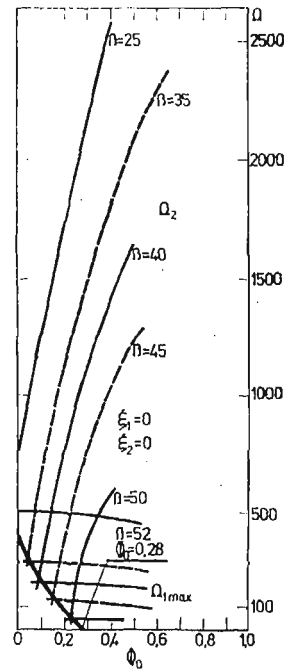
leżność wartości częstości, odpowiadającej punktowi przecięcia tych krzywych od wartości ograniczenia, dla którego krzywe przecinają się. Rys. 11a przedstawia zależność ograniczenia, odpowiadającego punktowi przecięcia tych krzywych od  $\beta$ , natomiast Rys. 11b zależność częstości, odpowiadającej punktowi przecięcia od  $\beta$ . Widoczne jest przejście graniczne do przypadku utraty stateczności, dla którego  $\Omega = 0$ ,  $\Phi_0 = 0.28$ ,  $\beta = 52$  (dokładna wartość  $\beta$  znaleziona w pracy [1] wynosi 52.36).



Rys. 7



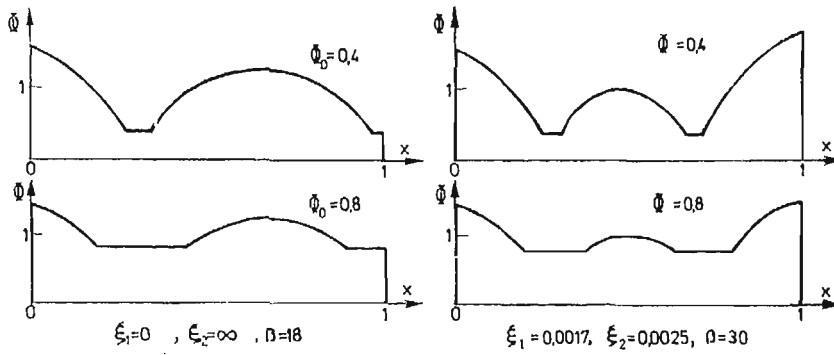
Rys. 8



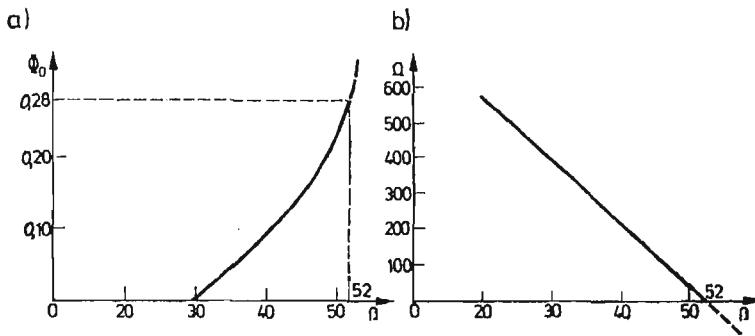
Rys. 9

Z zależności powyższych możemy odczytać również, iż konieczność stosowania optymalizacji dwumodalnej do kształtowania pręta obustronnie utwierdzonego z uwagi na częstość drgań, zachodzi dla  $\beta \in (30, 52)$ . Przykładowy rezultat otrzymany z uwzględnieniem takiego właśnie sformułowania przedstawia Rys. 12. Charakterystyczne jest to, iż począwszy od pewnego ograniczenia kształty optymalne nie zależą od niego (ograniczenie jest nieaktywne); kształt optymalny jest również przedstawiony na rysunku.

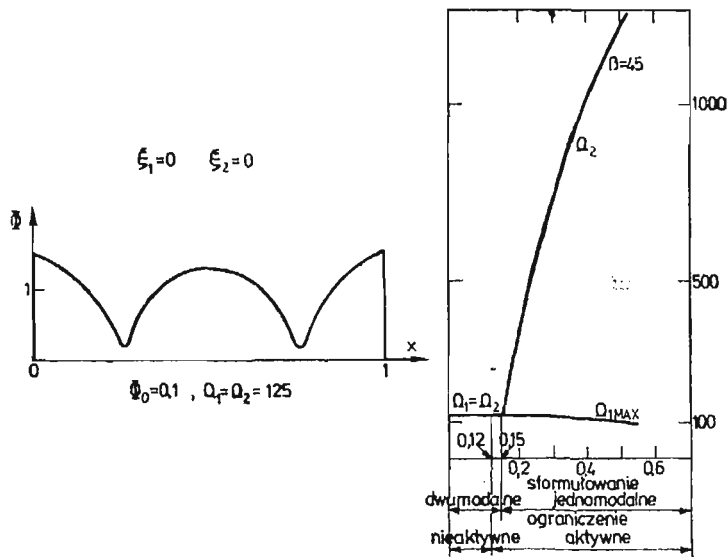




Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

## 5. Uwagi końcowe

Niniejsza praca zawiera szczegółowe rozwiązanie numeryczne problemu optymalnego kształtowania drgającego pręta ściskanego siłą osiową, z uwagi na podstawową częstość jego drgań. Dopuszczono możliwość istnienia asymetrii układu, spowodowanej różnymi wartościami parametrów charakteryzujących sprężystość utwierdzeń końców pręta. Wykazano konieczność stosowania optymalizacji dwumodalnej dla pewnych przypadków zamocowania końców pręta i pewnych wartości siły osiowej. Bardziej szczegółowo zbadano przypadek pręta obustronnie sztywnie utwierdzonego.

### Literatura cytowana w tekście

1. N. OLHOFF, S. H. RASMUSSEN, *On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns*, Int. J. Solids Structures, 7, 13, 1977, 605 - 614.
2. J. BŁACHUT, A. GAJEWSKI, *On unimodal and bimodal optimal design of funicular arches*, Int. J. Solids Structures, 7, 17, 1981, 653 - 667.
3. E. F. MASUR, Z. MRÓZ, *Singular solutions in structural optimization problems*, Proc. IUTAM Conf. on „Variational Methods in Solid Mechanics”, Northwestern University, Sept. 1978, ed. S. Nemat-Nasser, 337 - 343. New York: Pergamon Press, 1980.
4. B. BOCHENEK, A. GAJEWSKI, *Jednomodalna i dwumodalna optymalizacja ramy portalowej*, Rozpr. Inż., 1, 30, 1982, 21 - 36.
5. S. PRAGER, W. PRAGER, *A note on optimal design of columns*, Int. J. Mech. Sci., 4, 21, 1979, 249 - 251.
6. A. GAJEWSKI, *A note on unimodal and bimodal optimal design of vibrating compressed columns*, Int. J. Mech. Sci., 1, 23, 1981, 11 - 16.
7. J. BŁACHUT, A. GAJEWSKI, *A unified approach to optimal design of columns*, Solid Mech. Arch., 4, 5, 1980, 363 - 413.
8. W. B. GRINIEW, A. P. FILIPPOV, *Optimizacja stierżniej po spektrum sobstwiennykh znachenij*, Naukowa Dumka, Kijew, 1979.
9. W. B. GRINIEW, A. P. FILIPPOV, *Ob optimalnykh otcertanijach stierżniej w zadaczach ustojczivosti*, Stroit. Mech. i Rasz. Sooruz., 2, 1975, 21 - 27.

### Р е з ю м е

#### ОДНОМОДАЛЬНАЯ И БИМОДАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ СЖИМАЕМОГО СТЕРЖНЯ

Целью настоящей работы является подробное решение задачи оптимизации формы сжимаемого стержня, двухсторонне упруго защемленного из-за основной частоты его поперечных колебаний.

Допускается возможность существования асимметрии системы, произведенной разными значениями параметров характеризующих упругость защемлений концов стержней. Доказывается необходимость применения бимодальной оптимизации для некоторых случаев защемления концов стержня и некоторых значений осевой силы.

Более подробно исследован случай стержня двухсторонне жестко защемленного.

### S u m m a r y

#### SINGLE AND BIMODAL OPTIMIZATION OF VIBRATING COMPRESSED BAR

The paper is concerned with a detailed solution of the shape optimization problem of the elastically clamped-clamped compressed bar with respect to the fundamental frequency of its transverse vibration.

The asymmetry of system exerted by different values of the clamping elasticity parameters on each bar end is admissible.

Necessity of using bimodal optimization for certain cases of bar ends clamping as well as for certain values of axial force has been pointed out.

The case of rigidly clamped-clamped bar has been investigated in details.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 czerwca 1981 roku*

---