

PIERWSZORZĘDOWE OBSZARY NIESTATECZNOŚCI DRGAŃ WAŁÓW WYKONUJĄCYCH RUCH OBROTOWO-OSCYLACYJNY

STANISŁAW SUWAJ
STANISŁAW WOJCIECH
Politechnika Łódzka
Filia w Bielsku-Białej
Instytut Mechaniczno-Konstrukcyjny

1. Wstęp

Drgania giętne o ruchu obrotowo-oscyłacyjnym opisane są układem równań różniczkowych cząstkowych o współczynnikach okresowych [2].

Istotnym problemem przy analizie drgań takich wałów jest określenie przedziałów częstości krytycznych ruchu oscylacyjnego.

W niniejszej pracy przedstawiono zastosowanie do określenia pierwszorzędowych obszarów niestateczności, metody przybliżonej [1], wymagającej sprowadzenia analizowanych równań do układu kanonicznego hamiltonowskiego. Zaletą przedstawionej metody jest krótki czas obliczeń numerycznych.

2. Dyskretyzacja zagadnienia

W pracy [2] przedstawiono następujący układ równań opisujących przemieszczenia wałów wykonujących ruch obrotowo-oscyłacyjny:

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \dot{\varphi}^2 \xi - \ddot{\varphi} \eta - 2\dot{\varphi} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= k_1 \frac{dz^4 \xi_s}{dz^4} - g \sin(\varphi_0 + \varphi), \\ k_2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \dot{\varphi}^2 \eta + \ddot{\varphi} \xi + 2\dot{\varphi} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= k_2 \frac{d^4 \eta_s}{dz^4} - g \cos(\varphi_0 + \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{EJ_2}{\varrho F}, \quad k_2 = \frac{EJ_2}{\varrho F}$$

E — moduł Younga

J_1, J_2 — momenty bezwładności przekroju wału względem osi η i ξ

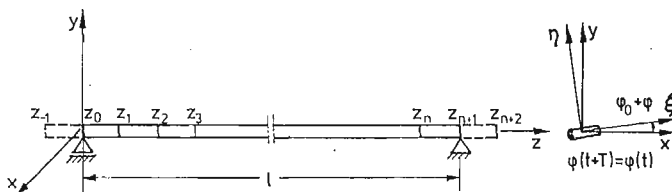
ϱ — gęstość

F — pole powierzchni przekroju

g — przyspieszenie ziemskie

φ_0 — wychylenie początkowe

Równania (1) są równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych i są trudne do bezpośredniej analizy. Dyskretyzując zagadnienie, można układ (1) doprowadzić do układu równań różniczkowych zwyczajnych względem zmiennej t wygodnego w analizie. We wspomnianej już pracy [2] do dyskretyzacji zagadnienia zastosowano metodę Galerkin. W niniejszej pracy zmienną z eliminuje się poprzez zastosowanie metody różnic skończonych.



Rys. 1 Model wału

2.1. Metoda różnic skończonych. W dalszych rozważaniach przyjmuje się następujące oznaczenia (rys. 1):

n — liczba wewnętrznych równoodległych punktów przedziału $\langle 0, l \rangle$

$h = \frac{l}{n+1}$ — długość podprzedziału

$$\left. \begin{aligned} z_i &= i \cdot h \\ a_i(t) &= \xi(z_i, t) \\ b_i(t) &= \eta(z_i, t) \end{aligned} \right\} i = 0, 1, \dots, n, n+1$$

Jeśli przyjąć, że równania (1) są spełnione gdy są spełnione w punktach $z_1, \dots, z_n$, oraz przybliżyć pochodne funkcji ξ i η względem zmiennej z w punktach $z_1, \dots, z_n$ przez różnice skończone centralne, to równania zagadnienia można zapisać w postaci następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych względem zmiennej t :

$$\ddot{Y} = 2\dot{\phi}B_2\dot{Y} + [-B_1 + \dot{\phi}^2J + \ddot{\phi}B_2]Y + G, \quad (2)$$

gdzie:

$$Y = \text{col} \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{h^4} B_0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{h^4} B_0 \end{bmatrix}$$

B_0 — macierz pięciodiagonalna o stałych współczynnikach

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \text{col} \{g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1n}, g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2n}\}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{1i} &= k_1 \frac{d^4 \xi_s}{dz^4} \bigg|_{z=z_i} - g \sin(\varphi_0 + \varphi) \\ g_{2i} &= k_2 \frac{d^4 \eta_s}{dz^4} \bigg|_{z=z_i} - g \cos(\varphi_0 + \varphi) \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

Elementy macierzy B_0 zależą przy tym od rodzaju podparcia wału [3].

2.2 Doprowadzanie równań do układu równań pierwszego rzędu. Układ równań (2) można łatwo zapisać w pożądaney w dalszych rozważaniach postaci jako układ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\dot{X} = A(t)X + F \quad (3)$$

gdzie:

$$X = \begin{bmatrix} Y \\ \dot{Y} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B_1 + \dot{\varphi}^2 I + \ddot{\varphi} B_2 & 2\dot{\varphi} B_2 \end{bmatrix}$$

Układ (3) jest układem $4n$ równań różniczkowych zwyczajnych względem zmiennej t . Do postaci (3) można doprowadzić równania (1) również w przypadku gdy węzły $z_i (i = 0, 1, \dots, n+1)$ nie są równoodległe.

2.3. Dokładność aproksymacji. Istotnym elementem przy stosowaniu metody różnic skończonych jest właściwe określenie liczby wewnętrznych punktów dyskretyzacji n wpływającej na dokładność wyników. Wpływ n na dokładność wyników zbadano porównując częstości drgań własnych wału nieruchomego obliczone przy różnych n metodą różnic skończonych, z wynikami otrzymanymi metodą ścisłą [4]. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Wpływ liczby n na wartości częstości drgań własnych
 $k_1 = 167,2 \text{ m}^4\text{s}^{-2}$, $k_2 = 107,1 \text{ m}^4\text{s}^{-2}$, $l = 1,2 \text{ m}$

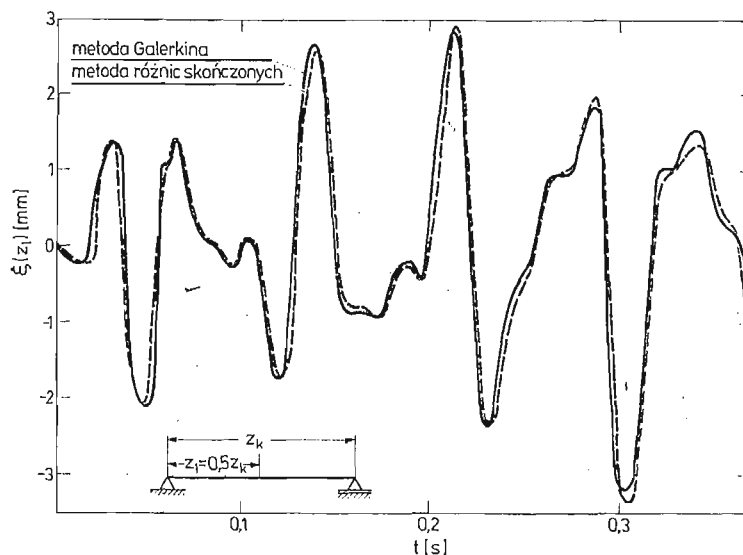
Nr kol. częstości	$n = 6$	$n = 9$	$n = 11$	$n = 15$	$n = 19$	$n = 23$	Metoda ścisła.
1	69,75	70,35	70,53	70,70	70,78	70,83	70,93
2	265,18	274,51	277,30	280,09	281,40	282,10	283,72
3	547,38	592,50	606,23	620,13	626,65	630,21	638,37
4	861,02	993,18	1034,89	1077,73	1098,04	1109,19	1134,89
5	1143,43	1437,35	1534,08	1635,33	1683,96	1710,85	1773,26
6	1428,67	1881,51	2069,78	2271,49	2369,99	2424,90	2553,49
7		2350,88	2605,48	2961,76	3139,22	3239,12	3475,59
8		2804,45	3104,67	3679,61	3972,74	4139,57	4539,54
9		3248,84	3533,34	4397,47	4849,99	5110,21	5745,36
10			4069,04	5087,74	5749,40	6136,33	7093,03
$n+1$	87,15	87,90	88,12	88,34	88,44	88,50	88,62
$n+2$	331,33	342,99	346,47	349,97	351,59	352,48	354,50
$n+3$	684,18	740,30	757,46	774,83	782,97	787,43	797,62
$n+4$	1075,82	1237,31	1293,06	1346,59	1371,96	1385,90	1418,00
$n+5$	1338,85	1795,91	1916,78	2043,28	2104,04	2137,65	2215,62
$n+6$	1672,85	2282,20	2586,12	2838,14	2961,21	3029,82	3190,49
$n+7$		2600,18	3255,45	3700,61	3922,35	4047,15	4342,62
$n+8$		2851,53	3879,18	4597,54	4963,79	5172,23	5671,99
$n+9$		3503,93	4414,78	5494,48	6059,89	6385,01	7178,61
$n+10$			5084,11	6356,94	7183,66	7667,12	8862,48

Jak wynika z rozważań przedstawionych w rozdziale 3 niniejszej pracy wyznaczenie pierwszorzędowych obszarów niestateczności sprowadza się do obliczenia częstości i postaci drgań własnych wału nieruchomego. Dlatego można przyjąć, że błąd popełniany przy wyznaczaniu pierwszorzędowych obszarów niestateczności jest określony przez błędy w wyznaczaniu częstości drgań i postaci drgań własnych wału nieruchomego. Wyniki przedstawione w tabeli 1 wykazują, że już przy $n = 9$ otrzymuje się pierwszą częstość drgań własnych ω_1 z błędem mniejszym od 1%, a ω_2 z błędem mniejszym niż 3,5% w odniesieniu do wartości dokładnych.

Na rys. 2 przedstawiono porównanie wyników uzyskanych przy rozwiązywaniu zagadnienia drgań wymuszonych w przypadku, gdy wymuszenie ruchu opisuje funkcja:

$$\varphi(t) = \Phi \sin \omega t. \quad (4)$$

Linia przerywaną zaznaczono rozwiązanie uzyskane po dyskretyzacji zagadnienia metodą różnic skończonych przedstawionej powyżej, a linią ciągłą rozwiązanie uzyskane



Rys. 2 Porównanie rozwiązań równania (3) uzyskanych metodą Galerkina i metodą różnic skończonych

po dyskretyzacji zagadnienia metodą Galerkina przy $n = 3$, a więc przyjęciu trójwyrazowego szeregu aproksymującego funkcje ξ i η [2]. Wyniki obliczeń są bardzo zbliżone. W obu przypadkach otrzymany po dyskretyzacji układ równań różniczkowych zwyczajnych względem zmiennej t rozwiązywano numerycznie wykorzystując metodę interpolacyjno-ekstrapolacyjną z automatycznym doбором kroku całkowania.

3. Wyznaczanie pierwszorzędowych obszarów niestateczności wałów oscylujących

Badanie stateczności w sensie Lapunowa [5] jednorodnego równania (3) czyli równania:

$$\dot{X} = A(t)X. \quad (5)$$

przy założeniu (4) powodującym okresowość macierzy $A(t)$ można poprzez podstawienie

$$W = SX \quad \text{gdzie } S = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\dot{\phi} \mathbf{B}_2 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

sprowadzić do badania stateczności układu hamiltonowskiego:

$$\dot{W} = \mathbf{B}(t) W \quad \text{gdzie } \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \mathbf{B}_2 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_1 & \dot{\phi} \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Uwzględniając założenie (4), po wprowadzeniu czasu bezwymiarowego:

$$\tau = \omega \cdot t, \quad (8)$$

można układ (7) zapisać w postaci:

$$\frac{dW}{d\tau} = [\gamma \mathbf{C}_0 + \phi \mathbf{D}_0 \cos \tau] W \quad (9)$$

gdzie:

$$\gamma = \frac{1}{\omega}; \quad \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

W pracy [1] (rozdział V, s. 359) podano twierdzenie umożliwiające określenie pierwszorzędowych obszarów niestateczności. W odniesieniu do równania (9) z twierdzenia tego wynika, że obszar dynamicznej niestateczności określony jest następująco:

$$\gamma_0 + \chi_{j,h}^{(1)} \phi < \gamma < \gamma_0 + \chi_{j,h}^{(2)} \phi, \quad (10)$$

gdzie:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\omega_j + \omega_h}$$

$$\chi_{j,h}^{(1,2)} = \frac{\mp 2|\chi_{j,h}|}{\frac{d}{d\gamma}(\omega_j + \omega_h)|_{\gamma=\gamma_0}}$$

$$\chi_{j,h} = (\mathbf{H}_{10}^1 \bar{\mathbf{C}}_j, \mathbf{C}_h)$$

ω_j — wartości własne będące pierwiastkami równania $\det[\gamma \mathbf{C}_0 - i\omega \mathbf{I}] = 0$

$\mathbf{C}_j$ — wektory własne macierzy $\gamma \mathbf{C}_0$ odpowiadające wartościom własnym $i\omega_j$ unormowane warunkami:

$$\gamma_{j,h} = \langle \mathbf{C}_j, \mathbf{C}_h \rangle = i(\mathbf{J} \mathbf{C}_j, \mathbf{C}_h) = \begin{cases} 0 & \text{jesli } j \neq h \\ 1 & j = h \leq 2n \\ -1 & j = h > 2n \end{cases}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{10}^1 = \frac{1}{2} \mathbf{J} \mathbf{D}_0.$$

Jak wynika z powyższych wzorów, przy wyznaczaniu obszarów niestateczności podstawowym problemem jest określenie wartości i wektorów własnych macierzy $\gamma \mathbf{C}_0$.

3.1. Wyznaczenie wartości i wektorów własnych macierzy $\gamma \mathbf{C}_0$. Zgodnie z cytowanym wyżej twierdzeniem wartości własnej ω_j określone są jako pierwiastki równania

$$\det[\gamma \mathbf{C}_0 - i\omega \mathbf{I}] = 0$$

Jeśli przez ω_{0j} oznaczyć wartości własne macierzy C_0 to zachodzi

$$\omega_j = -i\gamma\omega_{0j} \quad (j = 1, 2, \dots, 4n). \quad (11)$$

Wektory C_j są określone jako nietrywialne rozwiązania równań:

$$\gamma C_0 C_j = i\omega_j C_j$$

Łatwo sprawdzić, że wobec związków (11) wektory własne macierzy γC_0 i C_0 są identyczne.

Wobec powyższego problem wyznaczenia wartości własnych ω_j i wektorów C_j sprowadza się do wyznaczenia wartości i wektorów własnych macierzy C_0 .

Zgodnie z (9) macierz C_0 ma postać:

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jeśli oznaczyć:

$$\Omega = i \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n} \}$$

$$P = [P_1 P_2 \dots P_n]$$

gdzie:

λ_j^2 — są wartościami własnymi macierzy B_1

P_j — są wektorami własnymi macierzy B_1

to wartości własne macierzy C_0 są określone następująco:

$$\begin{cases} \omega_{0j} = i\lambda_j \\ \omega_{0j+2n} = -i\lambda_j \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (12)$$

a macierz P_0 wektorów własnych macierzy C_0 ma postać

$$P_0 = \begin{bmatrix} P & P \\ P\Omega & -P\Omega \end{bmatrix} \left(C_j = \begin{bmatrix} P_j \\ i\omega_j P_j \end{bmatrix}, \quad C_{2n+j} = \begin{bmatrix} P_j \\ -i\omega_j P_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n \right) \quad (13)$$

Macierz B_1 ma również postać, która upraszcza wyznaczenie jej wektorów i wartości własnych:

$$B_1 = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} k_1 B_0 & 0 \\ 0 & k_2 B_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Wobec (14) wartości własne λ_j i wektory własne P_j macierzy B_1 można określić następująco:

$$\begin{cases} \lambda_j^2 = \frac{k_1}{h^4} \omega_{Bj}^2 = \omega_{1j}^2 \\ \lambda_{j+n}^2 = \frac{k_2}{h^4} \omega_{Bj}^2 = \omega_{2j}^2 \end{cases} \quad (\omega_{Bj}^2 \text{ — wartości własne } B_0) \quad (15)$$

$$P_j = \begin{bmatrix} d_j^1 \\ d_j^2 \end{bmatrix} \quad \text{gdzie: } d_j^1 = \begin{cases} d_j & j \leq n, \\ 0 & j > n, \end{cases} \quad d_j^2 = \begin{cases} 0 & j \leq n \\ d_j & j > n \end{cases} \quad (16)$$

d_j — jest j -tym wektorem własnym macierzy B_0 ($j = 1, 2, \dots, n$)

Normowanie wektorów C_j wobec warunku:

$$\gamma_{jh} = \langle C_j, C_h \rangle = i(\mathbf{J} C_j, C_h) = \begin{cases} 0 & j \neq h \\ 1 & j = h \leq 2n \\ -1 & j = h > 2n \end{cases}$$

i wynikającej z ortogonalności wektorów własnych macierzy $\mathbf{B}_0$ zależności:

$$i(\mathbf{J}C_j, C_h) = i \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_j \\ i\omega_j P_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_h \\ i\omega_h P_h \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq h \\ 2\omega_j d_j^T d_j & j = h \end{cases}$$

polega więc na określeniu elementów przez liczbę $\sqrt{2\omega_j d_j^T d_j}$

3.2. Wyznaczenie współczynników $\chi_{j,h}^{(1,2)}$. Aby zgodnie z (10) określić współczynniki $\chi_{j,h}^{(1,2)}$ należy obliczyć wielkości

$$\chi_{j,h} = (\mathbf{H}_{10}^T \bar{C}_j, C_h) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{J} D_0 \bar{C}_j, C_h \right). \quad (17)$$

Podstawiając do (17) wektory C_j określone przez (13) - (16) otrzymano:

$$|\chi_{j,h}| = \frac{1}{2} |\lambda_j - \lambda_h| |d_j^T d_h^1 - d_j^1 d_h^T|. \quad (18)$$

Wobec (11) i (12) zachodzi:

$$\frac{d}{d\gamma} (\omega_j + \omega_h) = \lambda_j + \lambda_h \quad (19)$$

a więc współczynniki $\chi_{j,h}^{(1,2)}$ wynoszą:

$$\chi_{j,h}^{(1,2)} = \mp \frac{|\lambda_j - \lambda_h| |d_j^T d_h^1 - d_j^1 d_h^T|}{\lambda_j + \lambda_h} \quad (20)$$

Z (16) i (20) wynika, że nie występują obszary niestateczności zaczynające się w punktach

$\gamma_0 = \frac{1}{\omega_j + \omega_h}$ dla następujących przypadków:

1. $j < n$ i $h < n$
2. $j > n$ i $h > n$

ponieważ zachodzi wówczas:

$$d_j^T d_h^1 - d_j^1 d_h^T = 0. \quad (21)$$

W szczególności warunek (21) jest spełniony również przy $j = h$ czyli nie wystąpią obszary niestateczności odpowiadające $\vartheta_0 = 2\omega_j$ ($j = 1, 2, \dots, 2n$).

Wobec tego obszary niestateczności wystąpią tylko wówczas, gdy spełnione będą warunki:

1. $j < n$ i $h > n$
2. $j > n$ i $h < n$

przy czym wobec (15), (16) wyrażenie (20) przybierze postać:

$$\chi_{j,h}^{(1,2)} = \mp \frac{|\omega_{1,j} - \omega_{2,h-n}|}{\omega_{1,j} + \omega_{2,h-n}} \cdot |d_j^T d_h^1| \text{ — w przypadku 1.} \quad (22)$$

$$\chi_{j,h}^{(1,2)} = \mp \frac{|\omega_{1,j-n} - \omega_{2,h}|}{\omega_{1,j-n} + \omega_{2,h}} \cdot |d_j^T d_h^1| \text{ — w przypadku 2.} \quad (23)$$

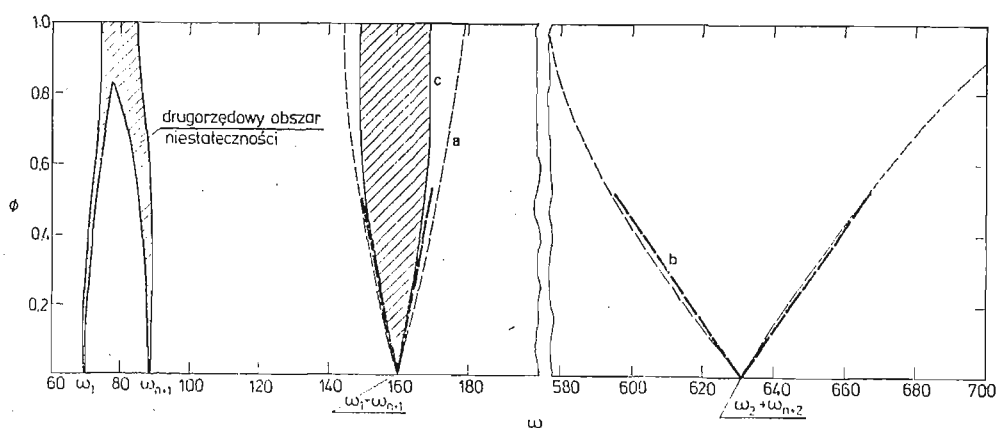
Z powyższych rozważań wynika, że wyznaczenie pierwszorządowych obszarów niestateczności sprowadza się do obliczenia wartości i wektorów własnych macierzy $\mathbf{B}_0$ stopnia n oraz wykonania szeregu mnożeń według wzorów (22) i (23). Jest to sprawa

o tyle istotną, że macierz C_0 jest macierzą stopnia $4n$, a więc sprowadzenie problemu obliczenia jej wartości i wektorów własnych do problemu obliczenia wartości i wektorów własnych macierzy stopnia n pozwala na znaczne skrócenie czasu obliczeń numerycznych.

3.2. Wyniki obliczeń numerycznych. Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla następujących danych liczbowych: $k_1 = 167,2 \text{ m}^4\text{s}^{-2}$, $k_2 = 107,1 \text{ m}^4\text{s}^{-2}$, $l = 1,2 \text{ m}$. Wartości i wektory własne obliczono według algorytmu QR wykorzystując podprogramy biblioteczne ODRY 1305. Wartości $\chi_{1,n+1}^{(1,2)}$ i $\chi_{2,n+2}^{(1,2)}$ odpowiadające $\vartheta_0 = \frac{\omega_{1,1} + \omega_{2,1}}{1}$ i $\vartheta_0 = \frac{\omega_{1,2} + \omega_{2,2}}{1}$ wyznaczono dla kilku n celem ustalenia wpływu tej liczby na dokładność wyników. Przedstawione w tabeli 2 wyniki pozwalają wysnuć wniosek, że $n \geq 9$ daje

Tabela 2

	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$	$n = 13$	$n = 15$
ω_1	87.49	87.90	88.12	88.25	88.34
ω_{n+1}	70.02	70.35	70.53	70.63	70.70
$\chi_{1,n+1}^{(2)}$	17.58	17.66	17.70	17.73	17.75
ω_2	336.65	342.99	346.47	348.59	349.97
ω_{n+2}	269.43	274.51	277.30	278.99	280.09
$\chi_{2,n+2}^{(2)}$	67.63	68.90	69.61	70.03	70.31



Rys. 3 Wykres obszarów niestateczności

- · — · — obszary niestateczności wyznaczone wg zależności (24)
- - - - - przybliżenia liniowe wg. wzoru (25)
- obszary niestateczności uzyskane w pracy [2]

zadowalającą dokładność. Rys. 3 przedstawia obszary niestateczności w płaszczyźnie (Φ, ω) wyznaczone wg zależności:

$$\gamma = \gamma_0 + \chi_{j,h}^{(1,2)} \Phi. \quad (24)$$

Wobec zależności $\gamma = \frac{1}{\omega}$ proste (24) w płaszczyźnie (Φ, ω) nie są już prostymi. Stosując jednak rozwinięcie

$$\frac{1}{1+\gamma} = 1 - \gamma + \dots$$

można określić w sposób przybliżony proste

$$\vartheta = \vartheta_0 - \chi_{j,h}^{(1,2)} \vartheta_0 \Phi, \quad (25)$$

ograniczające obszar niestateczności w płaszczyźnie (Φ, ω) . Proste te również naniesiono na rys. 3. Ponadto dla porównania wyników pokazano również na rys. 3 obszary niestateczności wyznaczone w pracy [2].

Przedstawiona metoda daje dobre wyniki dla małych wartości Φ . Zaletą jej jest krótki czas obliczeń oraz możliwość przewidywania istnienia obszarów niestateczności.

Literatura cytowana w tekście

1. V. ~~Star~~ JAKUBOVIČ, V. M. STARŽINSKIJ, *Linejnyje differencjalnyje uravnenija s periodiceskimi koefficientami i ich priloženije*, Izd. Nauka Moskva 1972.
2. S. SUWAJ, M. TROMBSKI, *Analiza stateczności wałów o ruchu obrotowo-oscyłacyjnym*, ABM z 1, 1982.
3. S. SUWAJ, *Analiza drgań wałów wykonujących ruch obrotowy wahadłowy o małych amplitudach*, Praca doktorska, Pol. Łódzka 1980.
4. Z. OSIŃSKI, *Teoria drgań*, PWN Warszawa 1978.
5. B. P. DEMIDOWICZ, *Matematyczna teoria stabilności*, WNT Warszawa 1972.

Резюме

ПЕРВИЧНЫЕ ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ВАЛОВ СОВЕРШАЮЩИХ ВРАЩАТЕЛЬНО-ОСЦИЛЯЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ

В работе представлен приближенный анализ первичных областей неустойчивости системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, описывающей колебания валов с вращательно-осциляционным движением. Для дискретизации проблемы применен метод конечных разностей.

Summary

FIRST ORDER NON-STABILITY FIELDS FOR VIBRATING SHAFT PERFORMING SWING-LIKE MOTION

An approximate analysis is presented for the first order non-stability fields for differential equations system with periodical factors due to shaft swing-like type vibrations. The discretization of the system is obtained by finite differences method.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 maja 1982 roku