MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 21 (1983)

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI[1)]

ZENON WASZCZYSZYN
Politechnika Krakowska

1. Uwagi wstępne

Rozwój teorii stateczności, widoczny po ostatniej wojnie światowej doznał istotnego przyspieszenia w ostatnich 15-tu latach. Świadczy o tym bogata bibliografia. Obok wznowień klasycznej monografii S. P. TIMOSHENKI i J. H. GERE [76] oraz A. PFLÜGERA [60] pojawiły się książki A. S. WOLMIRA [84], H. ZIEGLERA [89], J. M. THOMPSONA i G. W. HUNTA [75], K. HUSEYINA [34], D. O. BRUSHA i B. O. ALMROTHA [15], ostatnio N. A. AŁFUTOWA [1]. Opublikowano też wiele prac przeglądowych, dotyczących układów sprężystych i sprężysto-plastycznych [27, 36, 66, 67, 77]. Było organizowanych wiele konferencji poświęconych stateczności konstrukcji — warto zwrócić uwagę na te, po których zostały opublikowane pełne teksty referatów [16, 69, 72, 80]. Spośród rozwijanych zagadnień należy podkreślić duże zainteresowanie statecznością układów dyskretnych. Zajęto się rozwinięciem koncepcji W. T. Koitera analizy stanów pozakrytycznych i wpływu imperfekcji, różnymi kryteriami utraty stateczności, oszacowaniem zakresu obowiązywania teorii liniowych. Uwzględniając nieliniowości geometryczne i fizykalne zwrócono uwagę na wpływ zachowania się obciążeń podczas odkształcania się konstrukcji. Ostatnio coraz więcej uwagi poświęca się ważnym ze względów inżynierskich problemom stateczności przy działaniu obciążeń wieloparametrowych.

Silny rozwój teorii, zwłaszcza dotyczącej stateczności układów dyskretnych, był stymulowany koniecznością prowadzenia obliczeń niezbędnych dla praktyki inżynierskiej. Komputerowa technika obliczeniowa i metoda elementów skończonych (MES) znalazły tutaj szerokie możliwości zastosowań. W pierwszym rzędzie zajęto się problemami liniowymi, sprowadzając je do algebraicznych zagadnień obliczania wartości i wektorów własnych. Stało się to możliwe m.in. dzięki koncepcji macierzy geometrycznej wstępnych naprężeń [5, 25, 50]. Takie podejście zastosowano do analizy wyboczenia ram [29, 47], płyt [3, 40] i powłok [26, 53, 57]. Po dołączeniu macierzy mas zaczęto badać problemy utraty stateczności przy obciążeniach niekonserwatywnych [6]. Warto dodać, że problematyka stateczności w ujęciu MES szybko weszła do monografii i podręczników [52, 62, 91].

[1)] Praca została wykonana w ramach PW 05.12 i przedstawiona jako referat problemowy na V Konferencji Metod Komputerowych w Mechanice Konstrukcji — Karpacz, 6 - 9.V.1981. Jej obszerny skrót pt. „Stosowanie metody elementów skończonych w analizie stateczności konstrukcji" został opublikowany w T. 3 materiałów, wydanych w Pracach Naukowych Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, No 28, 1981, s. 101 - 121.

Opieranie się na równaniach teorii drugiego rzędu, wystarczające w liniowej analizie wyboczenia, jest niewystarczające do badania bardziej złożonych, nieliniowych problemów utraty stateczności. Z tego względu dużo uwagi poświęcono sformułowaniu odpowiednich modeli matematycznych oraz metod obliczeniowych w ramach MES (bogatą bibliografię można znaleźć w [42]). Algorytmizacja poszła w dwóch kierunkach. Pierwszy obowiązywał do koncepcji koiterowskich, łącząc aproksymację MES z metodą perturbacji i rozwinięciami w szeregi potęgowe [21, 44, 48, 74, 78, 82]. Takie ujęcie jest jednak efektywne tylko w ustrojach o małej liczbie stopni swobody lub o strukturze pasmowej, gdyż wymaga posługiwania się macierzami o dużych rozmiarach (trzeciego i czwartego rzędu). Komputerowe realizacje okazały się mało ogólne, gdyż w niewielkim stopniu korzystają ze standardowych procedur.

Drugi kierunek nawiązuje do ujęć „komputerowych", wykorzystując przede wszystkim metody i algorytmy algebry liniowej. Stało się to możliwe przede wszystkim dzięki sformułowaniom przyrostowym [8, 30, 79], łączonym z odpowiednimi procedurami iteracyjnymi [70, 71]. Charakterystycznym objawem był rozwój tych koncepcji prawie równolegle z ujęciami liniowymi analizy stateczności przy użyciu MES [26, 47, 87]. Obecnie problemy te wchodzą już do podręczników [92].

W pracy zajmiemy się wybranymi problemami związanymi ze stosowaniem MES w analizie stateczności konstrukcji lądowych. Celem pracy jest pokazanie wzajemnych sprzężeń między teorią stateczności konstrukcji a MES, w szczególności na możliwości tej metody w zakresie analizy nieliniowej. Najpierw przypomnimy podstawowe koncepcje nieliniowej analizy stateczności układów dyskretnych, poddanych działaniu wieloparametrowych obciążeń konserwatywnych. Problemy obliczania statecznych i niestatecznych ścieżek równowagi połączymy z wyznaczaniem punktów krytycznych. Wskażemy dalej na możliwości obliczania stateczności układów sprężysto-plastycznych i quasi-konserwatywnych.

Oprzemy się częściowo na opracowaniach [81, 80] oraz na studium literatury, ukierunkowanym pracami prowadzonymi w Instytucie Mechaniki Budowli Politechniki Krakowskiej w ramach PW 05.12.

2. Równowaga układów konserwatywnych

Ograniczamy się do układów dyskretnych o N stopniach swobody, którym odpowiada wektor[2] uogólnionych przemieszczeń węzłów:

$$q = \{q_i\} \equiv \{q_1, \ldots, q_N\} \in R^N \tag{2.1}$$

W MES przemieszczenia q_i łączone z węzłami, lub też jako tzw. uogólnione stopnie swobody [92] są wykorzystywane do aproksymacji pola przemieszczeń elementu skończonego e:

$$u^{(e)} = Nq^{(e)} \text{ i/lub } \Delta u^{(e)} = N\Delta q^{(e)}, \tag{2.2}$$

[2] W dalszym ciągu przez wektor rozumiemy macierz jednokolumnową, pisząc jej składowe poziomo i ujmując je w klamry.

gdzie N jest macierzą funkcji kształtu, a $q^{(e)}$ wektorem przemieszczeń węzłowych elementu e.

Obciążenia pozawęzłowe (np. powierzchniowe w powłokach) $p(u, \lambda)$ i węzłowe $G(u, \lambda)$ dzięki aproksymacji (2.2) i standardowemu postępowaniu MES (por. np. [92]) redukujemy do równoważnych, uogólnionych obciążeń węzłowych:

$$P = P(q, \lambda) \in R^N. \tag{2.3}$$

Podajemy ogólny przypadek, gdy obciążenia zewnętrzne P są funkcjami przemieszczeń q oraz M niezależnych parametrów obciążenia λ:

$$\lambda = \{\lambda^k\} \equiv \{\lambda^1, \dots \lambda^M\} \in R^M. \tag{2.4}$$

Rozważania będziemy prowadzili też w przestrzeni konfiguracyjno-obciążeniowej R^{N+M} o wektorze wodzącym

$$\tilde{q} = \{q, \lambda\} \equiv \{q_\alpha\} \in R^{N+M}. \tag{2.5}$$

Energia potencjalna układu składa się z energii sprężystej U i pracy obciążeń zewnętrznych W:

$$V = U + W \equiv \sum_{e=1}^{m} U^{(e)}(q^{(e)}; \mathfrak{s}^{(e)}) - TPq, \tag{2.6}$$

gdzie $U^{(e)}$ jest energią sprężystą pojedynczego elementu skończonego (ES). Dodatkowo wartość energii uzależniliśmy od wstępnych niedokładności w ES, które łącznie dla całego układu tworzą wektor imperfekcji

$$\mathfrak{s} = \{\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_s\} \in R^s \tag{2.7}$$

Jeśli układ jest w równowadze, to spełniony jest warunek stacjonarności energii potencjalnej:

$$\delta V = 0, \quad \text{skąd} \quad \delta U = -\delta W. \tag{2.8}$$

Stan równowagi można też obliczyć z zasady prac wirtualnych:

$$\delta L_w = \delta L_z. \tag{2.9}$$

W układach konserwatywnych (UK) obydwa sformułowania są równoważne, w szczególności zarówno uogólnione siły wewnętrzne, jak też zewnętrzne są potencjalne, a więc dla (2.9) można zbudować odpowiedni funkcjonał nazywany energią potencjalną (2.6). W dalszym ciągu zajmujemy się układami UK.

Dla niezależnych przemieszczeń q_i z (2.8) otrzymujemy układ równań równowagi:

$$V_i(\tilde{q}; \mathfrak{s})_i \equiv U_i(q; \mathfrak{s}) - P_i(q, \lambda) = 0. \tag{2.10}$$

Funkcje V_i możemy rozwinąć w otoczeniu $\tilde{q}$ w szereg Taylora[3]:

$$V_i(\tilde{q} + \Delta\tilde{q}; \mathfrak{s}) = V_i(\tilde{q}; \mathfrak{s}) + V_{i\alpha}(\tilde{q}; \mathfrak{s})\Delta q_\alpha + \frac{1}{2} V_{i\alpha\beta}(\tilde{q}; \mathfrak{s})\Delta q_\alpha \Delta q_\beta + \dots$$

[3] Powtarzający się wskaźnik oznacza sumowanie, przy czym dolne wskaźniki przebiegają wartości $1, \dots, N$, a górne $1, \dots, M$, gdyż numerują one składowe wektorów q i λ. Wskaźniki greckie są używane dla składowych wektora $\tilde{q}$, stąd odpowiadają one liczbom naturalnym $1, \dots, N+M$.

Przyrównanie lewej strony do zera i zachowanie członów liniowych względem przyrostów $\Delta \tilde{q}$ prowadzi do układu równań przyrostowych MES [81]:

$$(U_{ij}-P_{ij})\Delta q_j = P_i^k \Delta \lambda^k+(P_i-U_i), \tag{2.11}$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia pochodnych:

$$\begin{aligned} U_{ij} &= \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\tilde{q}}, \quad & P_{ij} &= \left.\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right|_{\tilde{q}}, \\ P_i^k &= \left.\frac{\partial P_i}{\partial \lambda^k}\right|_{\tilde{q}}, \quad & U_i &= \left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{\tilde{q}}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

W dalszym ciągu obok zapisu wskaźnikowego będziemy też posługiwali się notacją macierzową oraz oznaczeniami ogólnie przyjętymi w MES dla macierzy sztywności $\mathbf{K}$, obciążeń $\boldsymbol{P}$ i sił residualnych $\boldsymbol{R}$. Przyrostowe równanie równowagi (2.11) można napisać w postaci:

$$\mathbf{K}\Delta \boldsymbol{q} = \boldsymbol{P}'\Delta \lambda+\boldsymbol{R}, \tag{2.13}$$

gdzie styczna macierz sztywności

$$\mathbf{K} = (\mathbf{K}_0+\mathbf{K}_\sigma+\mathbf{K}_u)-\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_c-\mathbf{K}_p, \tag{2.14}$$

składa się z następujących macierzy

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}_0 \text{ — macierz małych przemieszczeń,} \\ &\mathbf{K}_\sigma \text{ — macierz początkowych naprężeń,} \\ &\mathbf{K}_u \text{ — macierz początkowych przemieszczeń,} \\ &\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_\sigma+\mathbf{K}_u \text{ — macierz geometryczna,} \\ &\mathbf{K}_p \text{ — macierz początkowych obciążeń,} \\ &\mathbf{K}_c \text{ — macierz układów grawitacyjnych.} \end{aligned} \tag{2.15}$$

W równaniu (2.13) występuje też macierz obciążeń odniesienia

$$\boldsymbol{P}' = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \lambda}, \tag{2.16}$$

która w szczególnym przypadku jednoparametrowych, proporcjonalnych obciążeń wynosi [81]:

$$\boldsymbol{P} = \lambda\overline{\boldsymbol{P}} \rightarrow \boldsymbol{P}' = \overline{\boldsymbol{P}}. \tag{2.17}$$

Obliczanie sił residualnych $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}-\boldsymbol{F}, \tag{2.18}$$

gdzie $\boldsymbol{F} = \{U_i\}$, ma istotne znaczenie w procedurach iteracyjnych, gdyż ich wyzerowanie oznacza osiągnięcie powierzchni (ścieżki) równowagi.

Macierze (2.14) otrzymuje się dla opisu Lagrange'a (por. [30, 42]). Można też stosować opis uaktualniony ze współrzędnymi współobrotowymi [7, 42]. Trudno wskazać na preferencje któregoś z opisów, gdyż ich zalety są zależne od typu konstrukcji (prętowe, powierzchniowe) i obciążeń (grawitacyjne, śledzące). W pracach autora i jego współpracowników posługiwano się współrzędnymi współobrotowymi w analizie kratownic [19, 80] i współrzędnymi Lagrange'a przy liczeniu powłok [54, 55]. W dalszym ciągu ograniczamy się do całkowitego opisu Lagrange'a (Total Lagrangian Formulation).

3. Stateczność układów konserwatywnych typu grawitacyjnego

Jeśli obciążenia nie zależą od konfiguracji to nazywamy je „martwymi" [43]. W takim przypadku znika macierz początkowych obciążeń $\mathbf{K}_p \equiv \mathbf{0}$ i układ konserwatywny jest typu grawitacyjnego [35]. Tak więc w układach grawitacyjnych mamy:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\lambda), \qquad \mathbf{K} \equiv \mathbf{K}_c, \tag{3.1}$$

gdzie macierz sztywności jest symetryczna $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$.

W stanie równowagi wektor sił residualnych zeruje się, $R_i = 0$. Stosując w takim przypadku wzory Cramera rozwiązanie układu (2.11) można napisać w postaci [64, 81]:

$$D\Delta q_i = d_i^k \Delta \lambda^k, \tag{3.2}$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$D = \det |K_{ij}|, \qquad d_i^k = \frac{\partial D}{\partial K_{ji}} P_j^k \tag{3.3}$$

Warunkiem koniecznym stanu krytycznego jest zerowanie się wyznacznika stateczności, skąd wynika warunek

$$D = 0 \Rightarrow d_i^k \Delta \lambda^k = 0. \tag{3.4}$$

W przypadku obciążeń jednoparametrowych $\Delta\lambda \equiv \Delta\lambda^1$, a $\boldsymbol{d}$ staje się macierzą jednokolumnową. Rozwiązanie (3.2) określa wtedy ścieżkę równowagi w przestrzeni R^{N+1}. Ścieżka (stan równowagi) jest stateczna jeśli macierz $\mathbf{K}$ jest dodatnio określona. Jeśli ścieżka równowagi $q_i(\eta)$, $\lambda(\eta)$, gdzie η jest parametrem, przechodzi przez początek układu $q_i(0) = 0$, $\lambda(0) = 0$ to nazywamy ją podstawową (rys. 2).

Jeśli przy monotonicznym wzroście parametru η osiągniemy wartość $\eta = \eta_c$, dla której jest spełniony warunek (3.4) to odpowiedni punkt nazywamy pierwotnym punktem krytycznym. Rozróżniamy dwa typy punktów krytycznych:

a) punkt bifurkacyjny (B)

$$\Delta\lambda \neq 0 \wedge \boldsymbol{d} = \mathbf{0}, \tag{3.5a}$$

b) punkt graniczny (G)

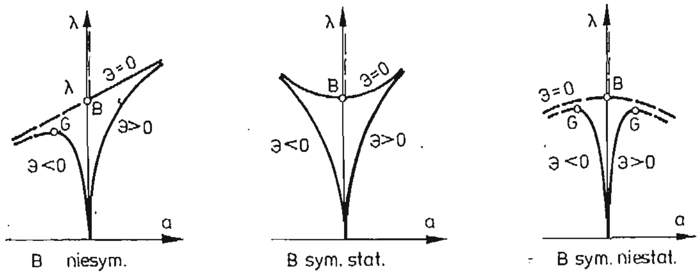
$$\Delta\lambda = 0 \wedge \boldsymbol{d} \neq \mathbf{0}. \tag{3.5b}$$

Zamiast zerowania wyznacznika stateczności $D = 0$ można posłużyć się równoważnym kryterium zerowania się najniższej wartości własnej stycznej macierzy sztywności $\mathbf{K}$. Jeśli zeruje się pojedyncza wartość własna to mówimy o jednokrotnym punkcie krytycznym. W takim punkcie zachodzi

$$\omega_1 = 0 < \omega_2 \leqslant \omega_3 \leqslant \ldots \leqslant \omega_N,$$

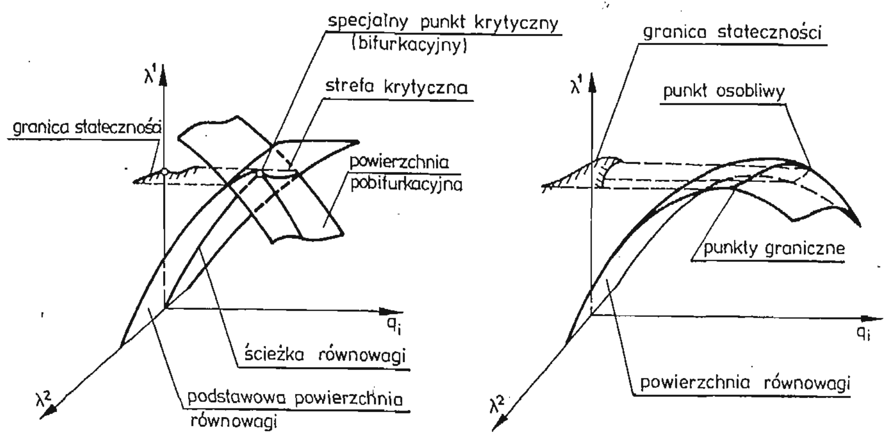
gdzie ω_i tworzą uporządkowany ciąg wartości własnych macierzy $\mathbf{K}$. Podstawowej wartości własnej $\omega_1 \equiv \omega$ odpowiada wektor własny $\boldsymbol{a}(1) \equiv \boldsymbol{a}$, który służy określeniu kierunku ścieżki pozakrytycznej [17, 64, 87].

W dalszym ciągu ograniczamy się do analizy pojedynczych, pierwotnych punktów krytycznych. W przypadku punktów bifurkacyjnych można mówić o niesymetrycznych (jeśli dla ścieżki pobifurkacyjnej w $\lambda = \lambda_c$ zachodzi $d\lambda/d\eta \neq 0$) i symetrycznych punktach bifurkacji stanów równowagi. Z kolei symetryczne punkty mogą być stateczne (jeśli dla $\lambda = \lambda_c$ zachodzi $d\lambda/d\eta = 0 \wedge d^2\lambda/d\eta^2 > 0$) lub niestateczne. Taka klasyfikacja jest powszechnie używana (por. np. [34, 66, 75]); gdyż określa ona tzw. czułość konstrukcji na imperfekcje. Nie wnikając w szczegóły warto tylko przypomnieć, że jedynie w przypadku gdy w idealnej konstrukcji sprężystej występuje symetryczny, stateczny punkt bifurkacji, to jest ona nieczuła na małe imperfekcje. W innych przypadkach imperfekcje powodują, że w konstrukcji nieidealnej może pojawić się punkt graniczny (na rys. 1 pokazano uproszczone wykresy, przyjmując jako rzędną amplitudę a postaci wyboczenia i zaznaczając linią kreskowaną niestateczne ścieżki równowagi).



Rys. 1

Klasyfikacja punktów krytycznych dla obciążeń wieloparametrowych jest znacznie bardziej złożona [34]. Rozwiązanie (3.2) określa powierzchnię równowagi, na której warunek (3.3) pozwala wyznaczyć strefę krytyczną. W przypadku obciążenia dwuparametrowego $M = 2$, pokazanego na rys. 2, strefa ta staje się krzywą krytyczną (miejsca geometryczne punktów krytycznych).



Rys. 2

Analogicznie do (3.5) można wyróżnić dwa przypadki szczególne [80]:

a) specjalny punkt krytyczny, gdy znikają wszystkie składowe macierzy d (odpowiada to bifurkacji stanów równowagi — rys. 2a):

$$\bigwedge_{i,k} d_i^k = 0, \tag{3.6a}$$

b) ogólny punkt krytyczny występuje, jeśli istnieje tylko jeden, różny od zera minor macierzy $\boldsymbol{d}$, taki aby jej rząd wynosił

$$\bigvee_{i,k} \mathrm{rz}(d_i^k) = M-1 \Rightarrow \bigvee_{k} \Delta\lambda^k \neq 0, \tag{3.6b}$$

b′) osobliwy punkt krytyczny powstaje, gdy występuje tylko trywialne rozwiązanie

$$\bigvee_{i,k} d_i^k \neq 0 \Rightarrow \bigwedge_{k} \Delta\lambda^k = 0. \tag{3.6b'}$$

W inżynierskich zastosowaniach szczególnie ważna jest powierzchnia graniczna stateczności (granica stateczności gdy $M = 2$), która jest brzegiem rzutu strefy krytycznej na podprzestrzeń obciążeń R^M. Powierzchnia ta ogranicza obszar bezpiecznych kombinacji obciążeń, nie wywołujących utraty stateczności. W zagadnieniach liniowych powierzchnia graniczna jest wypukła, w nieliniowych może być wklęsła [34].

4. Wyznaczanie ścieżki równowagi

Spośród wielu metod rozwiązywania nieliniowego układu równań MES jako najdokładniejsza jest uważana metoda Newtona—Raphsona [70]. W wersji klasycznej stosuje się sterowanie obciążeniowe, tzn. jako niezależny przyjmuje się parametr obciążeniowy $\eta \equiv \lambda$[4]. Ponieważ proces iteracyjny jest rozbieżny w otoczeniu punktu granicznego G, dlatego zaczęto stosować sterowanie przemieszczeniowe $\eta \equiv q_j$, [61, 90]. Jednak i to sterowanie nie zapewnia zbieżności iteracji, gdy zbliżamy się do obszaru, w którym $\Delta\lambda/\Delta q_j \to \infty$ (punkt E na rys. 3).

W pracy [81] omówiono dokładniej metody obliczania równań przyrostowych MES. Tutaj przytaczamy jedynie metodę obliczania w przestrzeni R^{N+1} — metodę, która zapewnia zbieżność iteracji dla gładkich ścieżek równowagi.

Idea metody polega na równorzędnym traktowaniu przyrostów przemieszczeń Δq_i i obciążenia $\Delta\lambda$. W tym celu posługujemy się rozszerzonym układem równań przyrostowych:

$$\begin{aligned} K_{ij}\Delta q_j - P_i'\Delta\lambda &= R_i, \\ t_j\Delta q_j + t_{N+1}\Delta\lambda &= \Delta\eta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

W przypadku proporcjonalnego obciążenia jednoparametrowego $\boldsymbol{P} = \lambda\overline{\boldsymbol{P}}$ będzie zachodziło:

$$P_i' = \frac{\partial P_i}{\partial\lambda} = \overline{P}_i, \tag{4.2}$$

gdzie $\overline{\boldsymbol{P}}$ jest wektorem obciążenia odniesienia.

---

[4] Jako λ przyjmuje się jeden z parametrów obciążenia, np. $\lambda \equiv \lambda^1$, ustalając wartości pozostałych $\lambda^l = \mathrm{const.}$ dla $l = 2, \ldots, M$.

Istotną rolę spełnia ostatnie równanie układu (4.1). Jeśli wektor jednostkowy $\tilde{t}$ jest bliski wektorowi stycznemu $\Delta\tilde{q}$, to otrzymujemy sterowanie parametrem ścieżki $\eta \equiv s$. Sterowania obciążeniowe lub przemieszczeniowe odpowiadają odpowiednio wyspecyfikowanym składowym wektora $\tilde{t}$:

a) sterowanie obciążeniowe $\eta \equiv \lambda$

$$\tilde{t} = \{0, \ldots, 0, 1\}, \tag{4.3a}$$

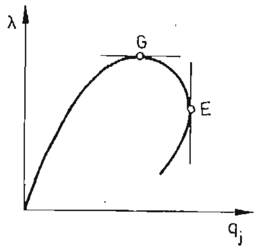
b) sterowanie przemieszczeniowe $\eta \equiv q_j$

$$\tilde{t} = \{0, \ldots, 0, \hat{j}, 0, \ldots, 0\}. \tag{4.3b}$$

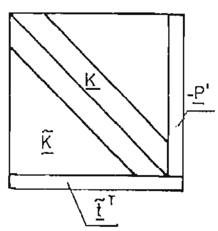
Układ równań (4.1) dalej będziemy nazywali rozszerzonym; zapisując go w postaci macierzowej otrzymujemy:

$$\tilde{\mathbf{K}}\Delta\tilde{q} = \tilde{R}. \tag{4.4}$$

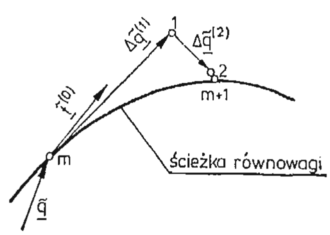
Rozszerzona macierz styczna $\tilde{\mathbf{K}}$ powstaje przez dołączenie wiersza $\tilde{t}$ i kolumny $\bar{P}$ (rys. 4). Można przy tym zapamiętywać tylko elementy niezerowe jakie występują np. w sterowaniach λ lub q_j i obciążeniach skupionych P'_k oraz półpasmo symetrycznej macierzy stycznej $\mathbf{K}$.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

W [64] wykazano, że macierz rozszerzona $\tilde{\mathbf{K}}$ dla sterowania s jest nieosobliwa dla gładkich ścieżek równowagi. Osobliwość macierzy $\tilde{\mathbf{K}}$ występuje w punktach bifurkacji (specjalnych punktach krytycznych).

Rozszerzone wektory $\Delta\tilde{q}$, $\tilde{R} \in \tilde{R}^{N+1}$ mają składowe:

$$\Delta\tilde{q} = \{\Delta q, \Delta\lambda\}, \qquad \tilde{R} = \{R, \Delta\eta\}. \tag{4.5}$$

Spośród wielu możliwych algorytmów obliczania kolejnych przybliżeń $\Delta\tilde{q}^{r+1}$ dla $r = 0, 1, \ldots$ wskażemy tylko jeden, omówiony dokładniej w [81], a naszkicowany na rys. 5. Polega on na przyjmowaniu wektora residum $\tilde{R}^{(r)}$ w postaci:

$$\tilde{R}^{(0)} = \{0, \Delta\eta\}, \qquad \tilde{R}^{(r)} = \{R^{(r)}, 0\} \quad \text{dla} \quad r \geqslant 1 \tag{4.6}$$

Podczas obliczeń można obliczać macierz $\tilde{\mathbf{K}}^{(r)}$ dla każdego kroku iteracyjnego. Stosowanie sterowania s nieco komplikuje programy na emc lecz pozwala w istotny sposób obniżyć liczbę iteracji, nawet dla długich kroków Δs. Można to sterowanie łączyć ze zmodyfikowaną metodą Newtona-Raphsona, gdy obliczamy tylko jeden raz $\tilde{\mathbf{K}}^{(r)} = \tilde{\mathbf{K}}(\tilde{q}^{(1)})$. Omówione podejścia zastosowano w pracach [19, 54, 80].

Mówiliśmy cały czas o obciążaniu jednoparametrowym. Rozważania odnoszą się również do przypadków $M > 1$ jeśli wykonamy tylko odpowiednie przekroje w przestrzeni R^{N+M}. Jeśli ustalimy wartości λ^l = const to ich przyrosty $\Delta\lambda^l = 0$ i w równaniach (4.1) należy obliczać $P_i(\lambda;\ \lambda^l)$ oraz $R_i(\lambda;\ \lambda^l)$. Przez λ rozumiemy zmienny parametr obciążenia, wybrany ze składowych wektora λ; np. jeśli $\lambda \equiv \lambda^2$ to $l = 1, 3, 4, \ldots, M$.

Prosty przykład takiego postępowania można znaleźć w [80].

5. Obliczanie punktów krytycznych i ścieżek pobifurkacyjnych

Opisane w poprzednim punkcie przyrostowe postępowanie można zastosować do wyznaczenia podstawowej ścieżki równowagi. W kolejnych punktach m tej ścieżki można obliczać wartość funkcji skalarnej $S(\eta)$, którą określa się tak, aby jej miejsca zerowe, obliczone z równania

$$S[\tilde{q}(\eta)] = 0, \tag{5.1}$$

występowały w punktach krytycznych $\tilde{q}^c = \tilde{q}(\eta_c)$.

Jako funkcję S można przyjąć wyznacznik stateczności $D = \det|\mathbf{K}|$ lub podstawową wartość własną ω macierzy stycznej $\mathbf{K}$. Z innych, zestawionych w [81], funkcji S przytaczamy obliczenie jej jako różnicy wartości parametrów obciążeń

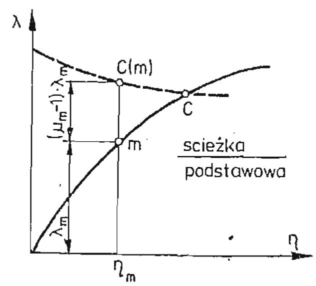
$$S = \lambda_{c(m)} - \lambda_m \equiv (\mu_m - 1)\lambda_m, \tag{5.2}$$

gdzie λ_m odpowiada punktowi m ścieżki równowagi, natomiast $\lambda_{c(m)}$ jest liczone z odpowiednio sformułowanego problemu wartości własnych. Tym zagadnieniem zajęto się szczegółowo w pracach [14, 63]. Tutaj przytaczamy jedynie obliczenia μ_m jako wartości własnej równania

$$(\mathbf{K}_0 + \mu\mathbf{K}_G[\tilde{q}(\eta)])\Delta q = \mathbf{0}, \tag{5.3}$$

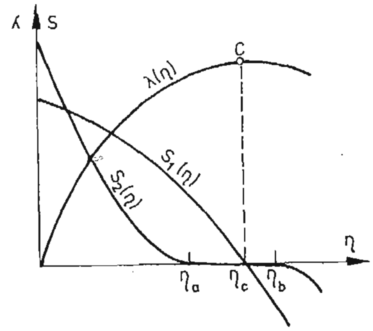
gdzie $\mathbf{K}_0$ jest liniową, a $\mathbf{K}_G$ geometryczną macierzą sztywności — por. (2.15).

Na rys. 6 pokazano interpretację funkcji (5.2). Przy realizacji obliczania ciągu kolejnych punktów podstawowej ścieżki równowagi $m \to C$ będzie zachodziło $\mu_m \to 1$. Jeśli wartości S (a więc w szczególnym przypadku (5.2) różnica $\mu_m - 1$) będą malały monotonicznie, to łatwo jest zbudować odpowiednie algorytmy iteracyjne. W zależności od przebiegu



Rys. 6

funkcji $S(\eta)$ obliczenia mogą być niestabilne (gdy występują nieciągłości) lub mało dokładne (gdy dla $\eta \in (\eta_a, \eta_b)$ wartości $S(\eta) \approx 0$). Na rys. 7 pokazano różne krzywe $S_1(\eta)$, $S_2(\eta)$, które nie są równoważne z punktu widzenia efektywności obliczeń numerycznych.



Rys. 7

Najczęściej w obliczeniach MES stosuje się $S \equiv D$, głównie ze względu na łatwość obliczania wyznacznika stateczności podczas rozwiązywania układu równań przyrostkowych (4.1). E. RIKS w swoich pracach [64, 65] zaproponował jako efektywniejsze przyjmowanie $S \equiv \omega$. Jednak możliwość „wymiany" najniższych wartości własnych $\omega_2 < \omega_1$ (por. [65]) powoduje, że nie można uznać tego sposobu za w pełni przydatny do automatyzacji obliczeń. Skuteczniejsze algorytmy można otrzymać przez łączenie obydwu kryteriów [19].

Posługiwanie się techniką ekstrapolacyjno-interpolacyjną, połączoną z efektywną metodą obliczania ścieżki równowagi i dobrym wyborem funkcji S pozwala na stosunkowo szybkie obliczenia punktów krytycznych. Odnosi się to zwłaszcza do punktów granicznych (por. [10, 28]).

Podobnie jak przy wyznaczaniu ścieżki równowagi wszystkie rozważania pozostają ważne dla obciążeń wieloparametrowych jeśli obliczenia punktów granicznych prowadzimy w przestrzeni R^{N+1}. W pracy [80] podano algorytm obliczania krzywych na strefie krytycznej (warstwie) dla $M = 2$, lub przyjęciu dwóch parametrów obciążenia jako zmienne niezależne, np. λ^1, λ^2 oraz $\lambda^l = \text{const}$ dla $l = 3, 4, \ldots, M$.

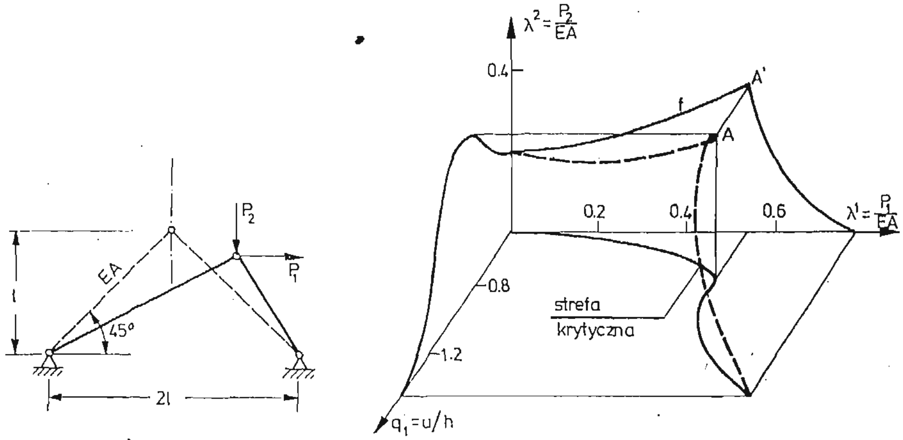
Jeśli skorzystamy z warunku stanu krytycznego $D = 0$, to po obliczeniu dowolnego punktu krytycznego, przy wykorzystaniu rozszerzonego układu równań (4.1), dalsze obliczenia prowadzi się w przestrzeni R^{N+2}, rozwiązując równania:

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{ij}\Delta q_j - P_i^1 \Delta\lambda^1 - P_i^2\Delta\lambda^2 &= R_i, \\ t_j \Delta q_j + t_{N+1}\Delta\lambda^1 + t_{N+2}\Delta\lambda^2 &= \Delta\eta, \\ D_j \Delta q_j &= -D(q; \text{э}), \end{aligned} \tag{5.4}$$

gdzie wyznacznik $D\ (q;\, \text{э})$ jest traktowany podczas iteracji jako residum, a D_j są pochodnymi

$$D_j \equiv \frac{\partial D}{\partial q_j} = \frac{\partial D}{\partial \mathrm{K}_{rs}} \mathrm{K}_{rs,j}. \tag{5.5}$$

Obliczenie pochodnych macierzy stycznej $\mathrm{K}_{rs,j}$ jest możliwe dla małej liczby stopni swobody układu, lub dla układów pasmowych. Na rys. 8 wziętym z [80] pokazano krzywą



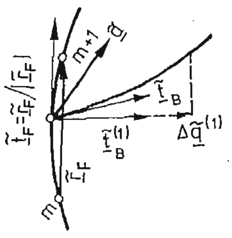
Rys. 8

graniczną $f(\lambda^1, \lambda^2) = 0$ dla kratownicy Misesa. Nieciągłość krzywej f powstaje w punkcie osobliwym A' jako wynik rzutowania strefy krytycznej (zaznaczonej linią kreskowaną) na płaszczyznę (λ^1, λ^2).

W przytoczonym przykładzie strefa krytyczna jest miejscem geometrycznym punktów granicznych. Gdyby w strefie występowały punkty bifurkacji (por. [83]), to podstawowa powierzchnia równowagi przestaje być gładka i algorytmy oparte na rozwiązywaniu układu (4.4) mogą przestać być zbieżne.

Oprócz obliczenia punktów bifurkacyjnych należy jeszcze określić ich typy. Można tego dokonać korzystając z wyższych pochodnych energii potencjalnej [34, 66, 75] lub przez obliczanie ścieżki pobifurkacyjnej w otoczeniu punktów B. Ponieważ macierze $\mathbf{K}$ i $\tilde{\mathbf{K}}$ są osobliwe w tym punkcie, to wektor $\boldsymbol{t}_F$ styczny do ścieżki pobifurkacyjnej liczymy w sposób przybliżony (rys. 9)

$$\tilde{\boldsymbol{t}}_F = \frac{\Delta\tilde{\boldsymbol{q}}_F}{(\Delta\tilde{\boldsymbol{q}}_F^T\Delta\tilde{\boldsymbol{q}})^{1/2}}, \qquad \Delta\tilde{\boldsymbol{q}}_F \approx \frac{1}{2}(\Delta\tilde{\boldsymbol{q}}_m + \Delta\tilde{\boldsymbol{q}}_{m+1}). \tag{5.6}$$



Rys. 9

Wektor styczny do ścieżki pobifurkacyjnej $\boldsymbol{t}_B$ obliczamy korzystając z podstawowego wektora własnego $\boldsymbol{a}$ macierzy stycznej $\mathbf{K}$ i wektora $\tilde{\boldsymbol{t}}_F = \{t_{F\alpha}\} = \{\boldsymbol{t}_F, \lambda_c\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{t}}_B &= \alpha\{\boldsymbol{a}+\gamma\boldsymbol{t}_F, \gamma\lambda_B\}, \\ \alpha &= (1+2\gamma\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{t}_F+\gamma^2)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

W pracy [64] wyprowadzono wzór na współczynnik

$$\gamma = -\frac{K_{ijk}a_i a_j a_k}{2K_{ij\alpha}a_i a_j t_{F\alpha}}. \tag{5.8}$$

Ponieważ obliczanie pochodnych macierzy **K** jest żmudne, dlatego w [64] zaproponowano obliczenie przybliżonego wektora $t_B^{(1)}$, niekolinearnego z $\tilde{t}_F$ i leżącego w płaszczyźnie $(\tilde{t}_F, \tilde{a})$. Wektorem takim może być wektor ortogonalny do $\tilde{t}_F$, skąd wynika:

$$\gamma^{(1)} = -\tilde{a}^T t_F. \tag{5.9}$$

W przypadku symetrycznego punktu B współczynnik $\gamma = 0$ i wektor styczny do ścieżki pobifurkacyjnej wynosi:

$$\tilde{t}_B = \{a, 0\}. \tag{5.10}$$

Wektor (5.10) można przyjmować jako pierwsze przybliżenie również dla punktów niesymetrycznych [17, 55, 81].

Przyjmowanie $\tilde{t}_B^{(1)}$ niekolinearnego z $\tilde{t}_F$ ma służyć rozpoczęciu iteracji w metodzie obliczania ścieżki, pobifurkacyjnej w R^{N+1}. Aby nie wracać na ścieżkę podstawową należy wprowadzić zakłócenie do macierzy stycznej $\mathbf{K}(\tilde{q}_F + \Delta q_B^{(1)})$, gdzie

$$\Delta q_B^{(1)} = \beta t_B^{(1)} \Delta\eta_F, \quad \beta < 1, \tag{5.11}$$

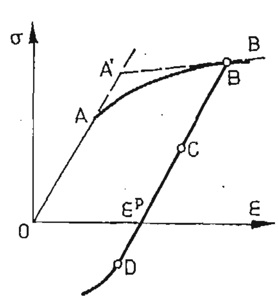
a $\Delta\eta_F$ jest ostatnim przyrostem parametru sterującego obliczaniem podstawowej ścieżki równowagi.

W niektórych konstrukcjach (np. łuki lub powłoki kuliste) można łatwo przewidzieć pobifurkacyjne postacie równowagi. W takich przypadkach można wprowadzić zakłócenie odpowiadające tej postaci, łącząc je ze zmianą sterowania przemieszczeniowego [9, 55].

6. Stateczność układów sprężysto-plastycznych

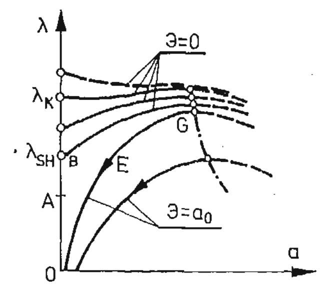
Konstrukcje sprężysto-plastyczne (SP) są niekonserwatywne, gdyż stan przemieszczeń zależy od historii obciążenia. Pomimo tego można do nich stosować kryterium statyczne, zwłaszcza jeśli nie pojawiają się lokalne obciążenia [37, 77, 88].

Pojawienie się lokalnych obciążeń i wtórnych uplastycznień w poszczególnych punktach konstrukcji (na rys. 10 pokazano wykres $\sigma(\varepsilon)$ dla jednoosiowego rozciągania) odróżnia układy (SP) od układów nieliniowo sprężystych. Zjawiska te silnie rzutują na analizę utraty stateczności, zarówno konstrukcji idealnych jak też z imperfekcjami.



Rys. 10

Na rys. 11 pokazano wykres $\lambda(a)$ zależności obciążenia od amplitudy a postaci wyboczenia słupa ściskanego. Przypominamy, że w przypadku materiału sprężystego powstaje symetryczny, stateczny punkt bifurkacji (rys. 1b), który wyklucza możliwość występowania punktów granicznych dla konstrukcji nieidealnych. Jeśli słup jest wykonany z materiału SP, to wyboczenie może nastąpić dla wartości λ_{SH}. Tą wartość obciążenia bifurkacyjnego łączymy z nazwiskiem Shanley'a [59], który zastosował kryterium statyczne $D = 0$ bez dopuszczenia lokalnych odciążeń w chwili bifurkacji. Odciążenia rozwijają się wzdłuż pobifurkacyjnej ścieżki równowagi, co powoduje wzrost λ. Zmiana konfiguracji, a zwłaszcza wtórne uplastycznienia powodują występowanie punktu granicznego G.



Rys. 11

Podstawowej postaci wyboczenia odpowiada cały przedział $(\lambda_{SH}, \lambda_K)$ statecznych punktów krytycznych, w których dopuszczamy lokalne odciążenia w chwili wyboczenia. Kryterium statyczne można też stosować dla $\lambda > \lambda_K$, gdzie λ_K jest obciążeniem Kármána [59].

W przypadku idealnych układów SP można też stosować koncepcje liniowej analizy stateczności, uzupełniając algorytmy liczenia wartości własnych odpowiednimi procedurami iteracyjnymi [18]. Jeśli układ równań przyrostowych przyjmiemy w postaci (5.3) to macierz $\mathbf{K}_0$ przestaje być liniowa, gdyż stałe materiałowe należy zastąpić funkcjami $\mathrm{E}(\sigma)$ stanu naprężenia w elementach $\sigma(\lambda)$. Dochodzimy w ten sposób do układu równań dla wyznaczenia ścieżki przedbifurkacyjnej:

$$K_0(\sigma)\Delta q = P'\Delta\lambda \tag{6.1}$$

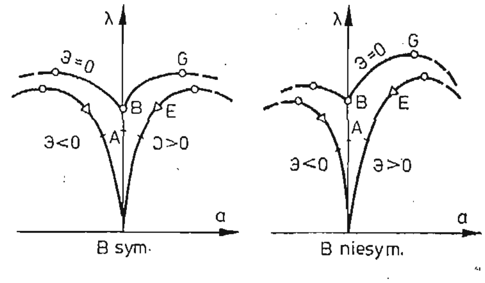
i warunku stateczności:

$$\det|\mathbf{K}_0(\sigma)+\lambda\mathbf{K}_G(\sigma)| = 0, \tag{6.2}$$

gdzie obok macierzy małych odkształceń $\mathbf{K}_0(\sigma)$ występuje macierz wstępnych naprężeń $\mathbf{K}_G(\sigma)$.

Obliczenia polegają na wyznaczeniu takiej wartości λ, aby spełnić równania (6.1) i (6.2). Posługiwanie się przyrostowym układem równań (6.1) umożliwia obliczenie $\min\lambda_c = \lambda_{SH}$ przy realizowaniu ścieżki podstawowej O—B na rys. 11 (punkt A odpowiada pojawieniu się pierwszych odkształceń plastycznych). W przypadku konstrukcji ramowych można posługiwać się liczbową macierzą $\mathbf{K}_\sigma$ — por. [18]. Przykłady zastosowania MES do analizy wyboczenia płyt sprężysto-plastycznych można znaleźć w [56, 68, 73].

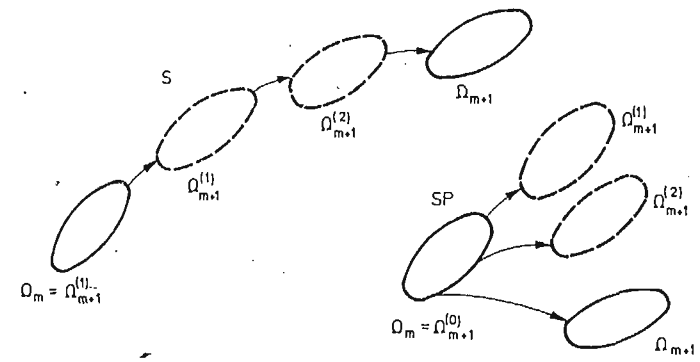
W układach SP można wyróżnić symetryczne i niesymetryczne punkty bifurkacji [77]. Na rys. 12 punkty B odpowiadają obciążeniu λ_{SH}. W odróżnieniu od idealnych układów



Rys. 12

sprężystych (rys. 1) konstrukcje SP są czułe na imperfekcje niezależnie od typu punktu bifurkacji. Z tego względu analiza stateczności idealnych układów SP ma mniejsze znaczenie praktyczne niż w układach sprężystych.

Obliczanie nieliniowych ścieżek równowagi dla układów SP dostarcza nowych problemów numerycznych. Podstawowym problemem jest konieczność uwzględnienia historii procesu. Problem ten jest dobrze opisany w literaturze (por. [42, 55]). Wspomnimy tylko o konieczności przechowywania i uaktualnienia zbiorów informacji we wszystkich punktach numerycznego całkowania w elementach. Wiąże się z tym konieczność zmiany procedur



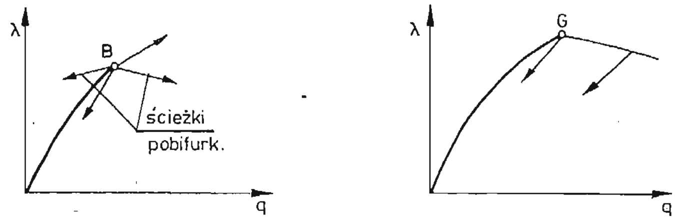
Rys. 13

iteracyjnych. Na rys. 13 pokazano różnicę między iteracjami układów S i SP przy przechodzeniu od punktu m do $m+1$ na ścieżce równowagi [42]. W przypadku SP konfigurację Ω_m traktuje się jako konfigurację odniesienia i dopiero po spełnieniu kryterium zbieżności uaktualnia się zbiory informacji. Ze względu na możliwość sprawdzania warunku utraty stateczności należy posługiwać się raczej metodą zmiennej sztywności, niż metodą początkowych obciążeń [42].

Powstawanie lokalnych odciążeń pogarsza zbieżność algorytmów [70]. Może to nastąpić przed osiągnięciem punktów krytycznych (punkty E na rys. 12). Należy również rozszerzyć kryterium utraty stateczności. W punktach krytycznych zamiast osobliwości macierzy stycznej $\mathbf{K}$ może nastąpić zmiana znaku wyznacznika stateczności $D(\eta)$:

$$D(\eta_{c-}) \cdot D(\eta_{c+}) \leqslant 0, \tag{6.3}$$

co wymaga odpowiedniej modyfikacji algorytmów. Nieciągłości wartości $D(\eta)$ powstają też jako wynik linearyzacji zależności $\sigma(\varepsilon)$, jak zaznaczono linią $O—A'—B'$ na rys. 10. W związku z powyższym należy liczyć się z pojawianiem się nowych ścieżek równowagi i nieciągłości zarówno w punktach bifurkacyjnych jak też granicznych (rys. 14) — (por. [88]).



Rys. 14

Jak wspomniano, pojawianie się lokalnych odciążeń może pogarszać zbieżność algorytmów. Ogólniej chodzi o pojawianie się nieciągłości przy przekraczaniu granicy plastyczności [88], a więc też przy powstawaniu pierwszych lub wtórnych odkształceń plastycznych.

Przykłady pełnej nieliniowej analizy stateczności konstrukcji prętowych, płyt i powłok można znaleźć w pracach [8, 26, 42, 55, 68].

7. Stateczność układów sprowadzanych do konserwatywnych

Jeśli obciążenie zależy od konfiguracji $p(q, \lambda)$, to w najogólniejszym przypadku nie można posługiwać się statycznym kryterium utraty stateczności. W przypadku obciążeń niekonserwatywnych należy stosować kryterium dynamiczne [89, 93], co w istotny sposób komplikuje obliczenia.

Wiadomo z wielu prac, że kryterium statyczne daje dobre oszacowanie obciążeń krytycznych w niektórych przypadkach obciążeń podśledzących [93] i śledzących [33, 45]. Odnosi się to w szczególności do ciśnienia zewnętrznego, które występuje jako podstawowe obciążenie wielu konstrukcji.

Obciążenia typu śledzącego można łatwiej rozważać w ramach opisu uaktualnionego niż globalnego [39]. Z drugiej strony prostsza algorytmizacja zdaje się przemawiać za opisem globalnym [8], toteż dalej stosujemy ten opis.

W przypadku obciążenia powierzchniowego zależnego od przemieszczeń $p(u, \lambda)$ jego przyrost wynosi:

$$\Delta p = \frac{\partial p}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial p}{\partial \lambda}\Delta\lambda = L\Delta u + p'\Delta\lambda. \tag{7.1}$$

Po przyjęciu aproksymacji MES według $(2.2)_2$ z pracy wirtualnej przyrostu obciążenia

$$\delta\Delta L_z = \sum_e \iint_{S_e} \delta\Delta u^T\cdot(p+\Delta p)\,\mathrm{d}S \equiv \delta\Delta q^T(P+K_p\Delta q+P'\Delta\lambda), \tag{7.2}$$

wynikają macierze równoważnych sił węzłowych $\boldsymbol{P}$, początkowych obciążeń $\mathbf{K}_p$ i obciążeń odniesienia $\boldsymbol{P}'$:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{P} = \sum_e \iint_{S_e} \boldsymbol{N}^T p dS, \\ \mathbf{K}_p = \sum_e \iint_{S_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{L} \boldsymbol{N} dS, \quad \boldsymbol{P}' = \sum_e \iint_{S_e} \boldsymbol{N}^T p' dS. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Macierz $\mathbf{K}_p$ będzie w ogólności macierzą niesymetryczną, co może powodować istotne trudności w posługiwaniu się kryterium statycznym utraty stateczności i standardowymi programami MES. Niesymetria macierzy $\mathbf{K}_p$ zależy nie tylko od obciążenia, ale też od konstrukcji — w szczególności od jej warunków podparcia. Pokażemy to na przykładzie równomiernego ciśnienia działającego na dźwigar powierzchniowy.

Dla uproszczenia rozważań przyjmujemy, że brzeg Γ pokrywa się z główną linią krzywizn $\xi^2 = \text{const}$. Pracę obciążenia normalnego p można napisać w postaci:

$$\delta W_p = -\delta U_p + \delta W_\Gamma, \tag{7.4}$$

gdzie część niepotencjalna wynosi [49]:

$$\delta W_\Gamma = \int_\Gamma p w \delta v d\Gamma \equiv \delta \boldsymbol{q}_v \hat{\mathbf{K}}_\Gamma \boldsymbol{q}_w. \tag{7.5}$$

Przy aproksymacji przemieszczeń $v = \boldsymbol{N}_v \boldsymbol{q}_v$, stycznych do brzegu Γ i przemieszczeń normalnych $w = \boldsymbol{N}_w \boldsymbol{q}_w$ otrzymujemy niesymetryczną macierz początkowych obciążeń brzegowych

$$\hat{\mathbf{K}}_\Gamma = \sum_{l=1}^{n} \int_{\Gamma_l} \boldsymbol{N}_v^T p \boldsymbol{N}_w d\Gamma, \tag{7.6}$$

gdzie sumowanie należy wykonać wzdłuż swobodnych, obciążonych brzegów Γ_l elementów skończonych, dla których zachodzi $p \neq 0 \wedge v \neq 0 \wedge w \neq 0$. Jeśli wektor przemieszczeń węzłów napiszemy w postaci:

$$\boldsymbol{q} = \{\boldsymbol{q}_u, \boldsymbol{q}_v, \boldsymbol{q}_w\}, \tag{7.7}$$

to $\hat{\mathbf{K}}_\Gamma$ występuje w macierzy $\mathbf{K}_\Gamma$

$$\mathbf{K}_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_\Gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

która stanowi niesymetryczną część macierzy wstępnych obciążeń $\mathbf{K}_p$.

Przy rozważaniu izolowanych elementów należy obliczyć macierze $\mathbf{K}_\Gamma^e$. Jeśli ciśnienie jest równomierne $p = p_0 = \text{const}$ to podczas agregacji elementów w układ macierze te ulegają wyzerowaniu dla wewnętrznych brzegów. Jeśli $p = p(\xi_1, \xi_2)$, jak należy przyjmować przy parciu wiatru, to dla tych brzegów $\hat{\mathbf{K}}_\Gamma^e \to \mathbf{0}$ przy zmniejszaniu wymiarów elementów. Zagęszczanie podziału na elementy skończone nie ma jednak wpływu na $\hat{\mathbf{K}}_\Gamma$ dla brzegów zewnętrznych.

Naszkicowany powyżej problem konserwatywności ciśnienia normalnego był najpierw rozpatrywany przez W. W. BOŁOTINA [13], następnie był uściślony przez G. A. COHENA [20], rozważany również w [31, 46].

W pracy [49] stwierdzono, że wpływ macierzy $\mathbf{K}_{\Gamma}$ na wartości obciążeń krytycznych konstrukcji poddanych działaniu równomiernego ciśnienia normalnego p_0 jest mały. Nie można natomiast pomijać symetrycznej części $\mathbf{K}_p$ (wynikającej z potencjału U_p w (7.4)) dla niektórych typów konstrukcji. Dobrym przykładem są pierścienie sprężyste obciążone ciśnieniem zewnętrznym p_0. Uwzględnienie macierzy $\mathbf{K}_{ps}$ daje krytyczną wartość ciśnienia normalnego do odkształconej osi pierścienia równą $3\mathrm{EI}/R^2$, gdy pominięcie $\mathbf{K}_{ps}$ odpowiada stałemu kierunkowi ciśnienia pierwotnie normalnego, skąd wynika $p_{kr} = 4\mathrm{EI}/R^2$ — por. [12].

Jak wykazano w [29] nie można pominąć $\mathbf{K}_{ps}$ w łukach wyniosłych. Problem ten jest szczegółowo dyskutowany w [43] w odniesieniu do powłok o różnej wyniosłości.

Wróćmy do ogólnego przypadku niesymetrycznej macierzy $\mathbf{K}_p$. Jeśli obliczamy ściśle wektor sił residualnych $\boldsymbol{R}$, to dla iteracyjnego obliczenia ścieżki równowagi można posługiwać się przybliżonymi postaciami macierzy stycznej $\mathbf{K}$. W szczególności można dokonać symetryzacji tej macierzy według wzoru:

$$\mathbf{K}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{K}+\mathbf{K}^T) = \mathbf{K}_0+\mathbf{K}_G-\frac{1}{2}(\mathbf{K}_p+\mathbf{K}_p^T). \tag{7.9}$$

Dochodzimy w ten sposób do tzw. sprowadzonego układu konserwatywnego, którego własności zostały zbadane w [35] z punktu widzenia teorii stateczności.

W pracy [23] wykonano obliczenia statecznych i niestatecznych części ścieżek równowagi dla różnych, przybliżonych macierzy stycznych. Obok $\mathbf{K}_s$ stosowano też macierz

$$\mathbf{K}_s^* = \mathbf{K}_0+\mathbf{K}_G, \tag{7.10}$$

a więc całkowicie pomijano macierz początkowych obciążeń $\mathbf{K}_p$. Obliczenia prowadzono w przestrzeni konfiguracyjnej R^N, stosując sterowanie obciążeniowe, a następnie przemieszczeniowe według algorytmu z [28] i zachowując ścisłe wyrażenie na siły residualne $\boldsymbol{R}$. Okazało się, że w zależności od konstrukcji proces iteracyjny przestaje być zbieżny przy stosowaniu $\mathbf{K}_s$ lub $\mathbf{K}_s^*$. Dotychczas nie posługiwano się metodą obliczania ścieżek równowagi w przestrzeni R^{N+1} przy uwzględnieniu macierzy $\mathbf{K}_p$.

8. Problemy nieomówione

W pracy nie zajęliśmy się problemami, które dotyczą doboru metod numerycznych, zagadnień informatycznych i realizacji programów na emc [7, 92].

Nie zajmujemy się też dokładniej problematyką aproksymacji MES, tzn. doborem typów elementów i ich stopni swobody. Należy tylko podkreślić, że w przypadku elementów niedostosowanych można mieć oszacowania wartości własnych od dołu [3, 92], a przy zbyt grubym podziale można źle ocenić typ punktu bifurkacji [55]. W pracach [22, 85] zwrócono uwagę na możliwość zmniejszenia globalnej liczby niewiadomych (wymiarów macierzy stycznej $\mathbf{K}$) przez przyjęcie pozawęzłowych stopni swobody.

W zagadnieniach stateczności możemy również dokonywać kondensacji stopni swobody [3], ale należy czynić to ostrożnie, aby nie wyeliminować istotnych postaci utraty stateczności [5].

Na koniec o wpływie imperfekcji. Oprócz lokalnych imperfekcji ujętych w (2.5) wektorem $\underline{\vartheta}$ mogą wystąpić imperfekcje związane z przykładaniem obciążeń. W praktyce nigdy nie realizujemy liniowego stanu przedwyboczeniowego, co można zmienić typ utraty stateczności [11, 41]. Wiąże się to np. z istotnym dla praktyki inżynierskiej problemem obciążeń krytycznych w ramach z prętami zginanymi [2, 38, 51].

Oczywiście, w pracy nie wyczerpano całej bogatej problematyki stosowania MES do analizy stateczności konstrukcji. Ograniczono się tylko do zakresu obowiązywania kryterium statycznego utraty stateczności. W związku z tym pominięto całkowicie problemy stateczności dynamicznej, gdzie również MES jest wykorzystywana [58].

Literatura cytowana w tekście

1. H. A. ALFUTOW, *Osnowy rasczota na ustojcziwost' uprugich sistiem*, Maszynostrojenije, Moskwa 1978.
2. E. D. AKKOUSH, H. K. HUANG, *Bifurcation, Pre — and Post — Buckling Analysis of Frame Structures*, Comp & Struct., **8** (1978), 667 - 678.
3. R. G. ANDERSON, B. H. IRONS, O. C. ZIENKIEWICZ, *Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements*, Int. J. Solids Struct., 4 (1968), 1031 - 1055.
4. J. H. ARGYRIS, *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis*, Pergamon Press 1964 (tłum. ros., Strojizdat, Moskwa 1968).
5. J. H. ARGYRIS, M. KÖNIG, D. A. NAGY, M. HAASE, G. MALEJANALUS, *Metoda elementów skończonych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych*, Metody Oblicz. w Mech. Nielin., Ossolineum 1977, 163 - 234.
6. R. S. BARSOUM, *Finite Element Method Applied to the Problem of Stability of a Non — conservative system*, Int. J. Num. Meth. Eng., **3** (1971), 63 - 87.
7. K. J. BATHE, E. L. WILSON, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice — Hall, Inc. 1976.
8. K-J. BATHE, H. OZDEMIR, *Elastic — Plastic Large Deformation: Static and Dynamic Analysis*, Comp.& Struct., **6** (1976) 81 - 92.
9. J. L. BATOZ, A. CHATTOPADHYNY, G. DUATT, *Finite Element Large Deflection Analysis of Shallow Shells*, Int. J. Num. Meth. Eng., **10** (1976), 39 - 58.
10. P. G. BERGAN, *Solution Algorithm for Nonlinear Structural Problems*, Intern. Conf. Eng. Appl. FEM, Høvik, Norway 1979, Vol. 1, 13.1 - 38.
11. J. F. BESSELING, *Nonlinear Analysis of Structures by the Finite Element Method as a Supplement to a Linear Algebra*, Int. J. Comp. Meth. Eng., **3** (1974).
12. S. R. BODNER, *On the Conservativeness of Various Distributed Force Systems*, J. Aero. Sci., (1958), 132 - 133.
13. W. W. BOŁOTIN, *Niekonserwatiwnyje zadaczi tieorii uprugoj ustrojcziwosti*, Fizmatigiz, Moskwa 1961.
14. B. BRENDEL, *Geometrisch nichtlineare Elastostabilität*, Inst. Baustatik Univ. Stuttgart, Bericht Nr. 79 - 1, 1979.
15. D. O. BRUSH, B. O. ALMROTH, *Buckling of Bars, Plates and Shells*, Mc Graw — Hill, 1975.
16. *Buckling of Structures*, Ed. B. Budiansky, Springer — Verlag 1976.
17. J. W. BUTTERWORDS, *Numerical Post — Buckling Analysis*, [72], 111 - 123.
18. Cz. CICHOŃ, Z. WASZCZYSZYN, *Numeryczna analiza wyboczenia sprężysto-plastycznych ram płaskich*, Arch. Inż. Ląd., 1, **25** (1979), 35 - 41.
19. Cz. CICHOŃ, *Podstawy nieliniowej analizy stateczności kratownic płaskich*, Arch. Inż. Ląd. (w druku).
20. G. A. COHEN, *Conservativeness of a Normal Pressure Field Acting on a Shell*, AIAA J., 4, **10** (1966), 1886 - 1887.
21. J. J. CONNOR, N. MORIN, *Perturbation Techniques in the Analysis of Geometrically Nonlinear Shells*, [32], 683 - 706.
22. S. B. DONG, J. A. WOLF, *Stability Analysis of Structures by a Reduced System of Generalized Coordinates*, Int. J. Solids Struct., **6** (1970), 1377 - 1388.

23. F. FREY, S. CESCOTTO, *Some New Aspects of the Incremental Total Lagrangian Description in Nonlinear Mechanics*, Int. Conf., EE in Nonl. Solid and Struct. Mech., Geilo, Norway, 1977, Prac. Vol. 1, C.05.1 - 20.
24. F. FREY, *L'analyse non linéaire des structures par la mèthode des elements finis of son application à la construction metallique*, Thèse de doctorat, Universite de Liège, 1977/78.
25. R. H. GALLAGHER, J. PADLOG, *Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis*, AIAA J., 6, **1** (1963), 1437 - 39.
26. R. H. GALLAGHER, R. A. GELLATLY, J. PADLOG, R. H. MALLETT, *A Discrete Element Procedure for Thin — Shell Instability Analysis*, AIAA J., 1, **5** (1967), 138 - 145.
27. R. H. GALLAGHER, *Finite Element Representation for Thin Shell Instability Analysis*, [16], ss. 40 - 51.
28. W. E. HAISLER, J. A. STRICKLIN, *Displacement Incrementation in Non — linear Structural Analysis by the Self — Correcting Method*, Int. J. Num. Meth. Eng., **11** (1977), 3 - 10.
29. B. J. HARTZ, *Matrix Formulation of Structural Stability Problems*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., ST5 (1965), 141 - 157.
30. H. D. HIBBIT, P. V. MARCAL, J. R. RICE, *A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement*, Int. J. Solids Struct,. **6** (1970), 1069 - 1089.
31. H. D. HIBBIT, *Some Follower Forces and Load Stiffness*, Int. J. Num. Meth. Eng., **14** (1979), 937 - 941.
32. *High Speed Computing of Elastic Structures*, Ed. B. Fraeijs de Veubeke, Univ. Liège, 1971.
33. K. HUSEYIN, R. H. PLAUT, *Application of the Rayleigh Quotient to Eigenvalue Problems of Pseudo — Conservative Systems*, J. Sound Vibr., **33** (1974), 201 - 220.
34. K. HUSEYIN, *Nonlinear Theory of Elastic Stability*, Noordhoff Intern. Publ., 1975.
35. K. HUSEYIN, *Stability of Autonomuous Systems*, [69], 121 - 180.
36. J. W. HUTCHINSON, W. T. KOITER, *Postbuckling Theory*, Appl. Mech. Rev., **23** (1970), 1353 - 1366.
37. J. W. HUTCHINSON, *Plastic Buckling*, Advances in Appl. Mech. Vol. 14, 1974, Academic Pres.
38. A. JERMINGS, *Frame Analysis Including Change of Geometry*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., ST3 (1968), 627 - 644.
39. R. F. JONES, H. G. COSTELLO, T. E. REYNOLDS, *Buckling of Pressure Loaded Rings and Shells by the Finite Element Method*, Comp. a. Struct., **7** (1977), 267 - 274.
40. K. K. KAPUR, B. J. HARTZ, *Stability of Plates Using the Finite Element Method*, Proc. ASCE, J. Mech. Eng. Div., EM2 (1966), 177 - 195.
41. A. D. KERR, M. T. SAIFER, *The Linearization of the Prebuckling State and Its Effect on the Determined Instability Loads*, J. Appl. Mech., **36** (1969), 775 - 783.
42. M. KLEIBER, *Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych — teoria i numeryczna analiza konstrukcji*, Prace IPPT PAN, Warszawa 1978.
43. W. T. KOITER, *General Equations of Elastic Stability for Thin Shells*, Proc. Symp. Theory of Thin Shells., Univ. Houston Press, 1967, 187 - 230.
44. T. E. LANG, B. J. HARTZ, *Finite Element Matrix Formulation of Post — Buckling Stability and Imperfectlon Sensitivity*, [32], 727 - 758.
45. H. H. E. LEIPHOLZ, *On Conservative Elastic Systems of the First and Second Kind*, Ing. Arch., **43** (1974), ss. 255 - 271.
46. K. LOGANATHAN, S. C. CHANG, R. H. GALLAGHER, J. F. ABEL, *Finite Element Representation and Pressure Stiffness in Shell Stability Analysis*, Int. J. Num. Meth., Eng. **14** (1979), 1413 - 1429.
47. R. H. MALLETT, P. V. MARCAL, *Finite Element Analysis of Nonlinear Structures*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., ST9 (1968), 2081 - 2105.
48. R. H. MALLETT, R. T. HAFTHA, *Progress in Nonlinear Finite Element Analysis Using Asymptotic Solution Techniques*, Advances Comp. Meth. Struct. Mech. Design, Univ. Alabama Press. Huntsville 1972, 357 - 373.
49. H. A. MANG, *Symmetricability of Pressure Stiffness Matrices for Shells with Loaded Free Edges*, Int. J. Num. Mech. Eng., **15** (1980), 981 - 990.
50. H. C. MARTIN, *On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems, Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright — Patterson AFB, Dayton Ohio (1966) DL-TR-66-80, 697 - 716.

51. E. F. MASUR, I. C. CHANG, J. H. DONNELL, *Stability of Frames in the Presence of Primary Bending Moments*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., EM4 (1961), 19 - 34.
52. B. NATH, *Fundamentals of Finite Elements for Engineers*, The Atklone Press, London 1974.
53. D. R. NAVARATNA, T. H. H. PIAN, L. A. WILIMIR, *Stability Analysis of Shells of Revolution, by the Finite Element Method*, AIAA J., 6 (1968), 355 - 361.
54. NGUYEN — CAO — DUONG, Z. WASZCZYSZYN, *Stateczność sprężysto-plastycznych łuków i paneli walcowych*, Rozpr. Inż. (w druku).
55. NGUYEN — CAO — DUONG, *Analiza stateczności sprężysto-plastycznych łuków i paneli walcowych* Rozpr. dokt., Politechnika Krakowska 1981.
56. A. NEEDLEMAN, *Axisymetric Buckling of Elastic — Plastic Annular Plates*, AIAA J., 11, 12 (1974), 1954 - 1956.
57. J. T. ODEN, J. E. KEY, *Numerical Analysis of Finite Axisymmetric Deformations of Incompressible Elastic Solids of Revolution*, Int. J. Solid Struct., 6 (1970), 497 - 518.
58. W. OSTACHOWICZ, *Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy stateczności dynamicznej prętów i płyt cienkich*, IV Konfer. Met. Komp. w Mech. Konstr., Koszalin 1979, Ref. probl., 193 - 224.
59. J. G. PANOWKO, I. I. GUBANOWA, *Ustrojcziwost' i kolebanija uprugich sistiem*, Wyd. 3, Nauka, Moskwa 1979.
60. A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme des Elastostatik*, Wyd. 2, Springer — Verlag 1964.
61. T. H. H. PIAN, PIN-TONG, *Variational Formulation of Finite Displacement Analysis*, [32].
62. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*, Mc Graw — Hill 1968.
63. E. RAUM, *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Element*, Inst. Baustatik Univ. Stuttgart, Bericht Nr. 76 - 2, 1976.
64. E. RIKS, *An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems*, Int. J. Solids Struct., **15** (1979), 529 - 551.
65. E. RIKS, *A Unified Method for the Computation of Critical Equilibrium States of Nonlinear Elastic Systems*, Acta Techn. Acad. Sci. Hung, **87** (1978), 121 - 141.
66. J. ROORDA, *Concepts in Elastic Structural Stability*, Mechanics Today, Ed. S. Nemat — Nasser, Vol. 1, 1972, Pergamon Press.
67. M. J. SEWELL, *A Survey of Plastic Buckling*, Stability, Ed. H. H. E. Leipholtz, Univ. Waterloo, 1972, 85 - 198.
68. T. H. SØREIDE, *Collapse Behavior of Stiffmed Plates Using Alternative Finite Element Formulation*; Div. Struct. Mech. Univ. Trondheinm, Rep. No 77 - 3, 1977.
69. *Stability of Elastic Structures*, Ed. H. H. E. LEIPHOLZ, Springer — Verlag 1978.
70. J. A. STRICKLIN, W. E. HAISLER, W. A. RIESEMAN, *Evaluation of Solution Procedures for Material and/or Geometrically Nonlinear Structural Analysis*, AIAA J., **11** (1973), 292 - 299.
71. J. A. STRICKLIN, W. E. HAISLER, *Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis*, Comp. a. Struct., **7** (1977), 125 - 136.
72. *Structural Instability*, Ed. W. J. SUPPLE, IPC Business, London 1973.
73. K. TERAZAWA, J. YAGI, Y. UEDA, M. MATSUISHI, *Elastic — Plastic Buckling of Plates using the Finite Element Method*, J. Soc. Naval Arch. of Japan, 122 (1967).
74. J. M. T. THOMPSON, A. C. WALKER, *The Nonlinear Perturbation Analysis of Discrete Structural Systems*, IJSS, 4 (1968), 757.
75. J. M. T. THOMPSON, G. W. HUNT, *A General Theory of Elastic Stability*, J. Wiley & Sons, 1973.
76. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of Elastic Stability*, 2-nd Ed., Mc Graw — Hill, 1961 (polskie tłum., Arkady 1963).
77. V. TVERGAARD, *Buckling Behaviour of Plate and Shell Structures*, Theoret. and Appl. Mech., Ed. W. T. Koiter, North — Holland Publ. Co., 1976, 233 - 246.
78. A. C. WALKER, *A Nonlinear Finite Element Analysis of Shallow Circular Arches*, Int. J. Solids Struct. 5 (1969), 97 - 107.
79. K. WASHIZU, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press 1975.
80. Z. WASZCZYSZYN, E. PYTEL, NGUEN-CAO-DUONG, *Numeryczna analiza nieliniowych zagadnień utraty stateczności kratownic sprężystych przy obciążeniach wieloparametrowych*, Rozp. Inż. (w druku).

81. Z. WASZCZYSZYN, *Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych*, [86] 341 - 380.
82. L. C. WELLFORD, Gh. M. DIBB, *Post — Buckling Behaviour of Structures Using a Finite Element Nonlinear Eigenvalue Technique*, Int. J. Num. Meth. Eng., **15** (1980), 955 - 980.
83. R. H. B. WELTON, *Snap — Through of Arch. Model under Multiple Loads*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., AM4, **104** (1978), 964 - 967.
84. A. S. WOLMIR, *Ustojcziwost' dieformirujemych sistiem*, Nauka, Moskwa 1967.
85. M. WÓJCIK, Z. WASZCZYSZYN, *Zastosowanie pozawęzłowych stopni swobody w analizie wyboczenia ram płaskich metodą elementów skończonych* (w przygotowaniu do druku).
86. *Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji*, Ed. Z. WASZCZYSZYN, Ossolineum, 1981,.
87. Y. YAMADA, K. IWATA, T. KAHIMI, T. HOSOMURA, *Large deformation and critical loads analysis of framed structures*, Comp. Meth. Nod. Mech., Texas Inst., (1974), 819 - 828.
88. Y. YOKKO, T. NAKAMURA, H. UETANI, *The incremental Perturbation Method for Large Displacement Analysis of Elastic — Plastic Structures*, Int. J. Num. Meth. Eng., **10** (1976), 503 - 525.
89. H. ZIEGLER, *Principles of Structural Stability*, Blaisdell Publ. Co., 1968 (tłum. ros., Mir, Moskwa 1971),
90. O. C. ZIENKIEWICZ, *Incremental Displacement in Nonlinear Analysis*, Int. J. Num. Meth. Eng., **3** (1971), 587 - 592.
91. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, *The Finite Element Method of Structural and Continuum Mechanics*, Mc Graw — Hill 1967.
92. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method*, 3-d Ed., Mc Graw-Hill 1978.
93. M. ŻYCZKOWSKI, *Influence of the Behaviour of Loading on Its Critical Value*, [69], ss. 181 - 210.

Р е з ю м е

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УСТОЙЧИВОСТИ СООРУЖЕНИЙ

Представлены некоторые проблемы применения МКЭ к нелинейному анализу устойчивости сооружений. Коротко напоминаются основные предположения и определение анализа дискретных систем при многопараметрический нагрузках. Затем рассуждается вычисление состояний равнобесия и критических точек в конфигурационно — силовом престранстве. Указаны возможности статического анализа устойчивости упруго- пластических систем и квази — консерватывных систем, в которых нагрузка является функциеи конфигурации сооружения.

S u m m a r y

FINITE ELEMENT METHOD IN STRUCTURAL STABILITY

Some problems of application of FEM to nonlinear structural stability are discussed. Basic concepts of the nonlinear analysis of discrete systems subject to nonconservative loads are shortly presented. Then computation of equilibrium paths and critical points in the load configuration space in considered. Certain possibilities of the analysis of elastic-plastic systems and the static analysis of quasi- conservative systems (if load depends on configuration of structure) are pointed out.

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 marca 1982 roku