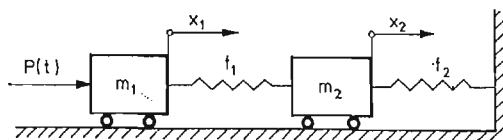


WYZNACZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UDERZENIA W UKŁADZIE O DWU STOPNIACH
SWOBODY Z NIELINIOWOŚCIĄ TYPU DUFFINGA I HERTZA

HENRYK WOJCIECHOWSKI (GŁIWICE)

1. Wstęp

Obiektem badań teoretycznych jest zachowawczy, nieliniowy układ dwumasowy (rys. 1), którego ruch wymuszony został obciążeniem nieokresowym o znanym przebiegu czasowym, tj. o znanym kształcie impulsu.



Rys. 1.

Układ taki może być modelem dynamicznym różnych urządzeń technicznych pracujących uderowo. Uderzenia występujące w eksploatacji urządzeń technicznych mogą służyć z jednej strony jako sposób przekazywania energii np. młoty, z drugiej strony są źródłem niepożądanych nadmiernych sił działających na elementy konstrukcji.

W pierwszym przypadku celem działalności konstruktora jest optymalizacja przekazywania energii przez odpowiedni dobór parametrów układu, zaś w drugim minimalizacja skutków uderzenia. Stąd też analiza dynamiki układów uderzeniowych, zwłaszcza nieliniowych — bliższych rzeczywistości, jest zagadnieniem technicznie ważnym. Układom nieliniowym o dwu stopniach swobody poświęcono szereg prac m.in. [2], [6], [7], [10], [11], [12], [13], [14], w których rozwiązano zagadnienie drgań swobodnych przy warunkach początkowych $x_1(0) = x_1$, $x_2(0) = x_2$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, albo też zagadnienie drgań wymuszonych harmonicznymi. Jak wiadomo [3] warunki początkowe ruchu wzbudzonego uderzeniami można formułować dwojako.

Pierwszy sposób, matematycznie prostszy, polega na tym, że obciążenie traktuje się jako impulsowe (w sensie Diraca) i wtedy analiza ruchu wymaga tylko opisu drgań swobodnych przy określonych prędkościach początkowych. Sposób ten można stosować gdy długość obciążenia jest mała wobec najkrótszego okresu drgań własnych. Gdy warunek ten nie jest spełniony, stosuje się drugi sposób. Wymagana tu jest znajomość czasowego przebiegu obciążenia, czyli kształtu impulsu siły uderzenia. Obliczenia rozdziela się na dwa etapy.

W pierwszym etapie bada się ruch wymuszony siłą o znanym przebiegu czasowym i zerowych warunkach początkowych, celem określenia stanu kinematycznego w końcowej

chwili obciążenia. Te dane służą jako warunki początkowe dla następującej potem autonomicznej fazy ruchu. Zauważmy, że największe przemieszczenia (odkształcenia) mogą wystąpić zarówno w pierwszej jak i drugiej fazie ruchu, czego nie da się rozstrzygnąć na gruncie metody pierwszej.

W tym sensie drugi sposób podejścia jest ogólniejszy, a zarazem prowadzi do wyników dokładniejszych. Wymaga on jednak znajomości kształtu impulsu obciążenia, który zależy od szeregu czynników, przede wszystkim od geometrii powierzchni styku oraz sprężystych lub sprężysto-plastycznych własności zderzających się ciał.

W przypadku uderzenia ciał sprężystych, zagadnienie stykowe opisuje się znanymi wzorami Hertza lub ogólniejszymi Sztajermana. Chcąc rozwiązać zagadnienie uderzenia dwóch ciał sprężystych, z których jedno (bijać) jest swobodne, zaś drugie (ciało uderzone) jest podparte w określony sposób, trzeba badać układ złożony co najmniej z dwóch mas, pomiędzy którymi zachodzi oddziaływanie typu Hertzowskiego.

Ten sposób ujęcia zagadnienia reprezentowany jest w p. 4 niniejszej pracy.

Nieliniowość typu Hertzowskiego sprawia szczególnie dużo kłopotów przy próbach analitycznego rozwiązania zagadnień dynamicznych. Aby uniknąć dodatkowych komplikacji, przyjęto warunki początkowe jak przy obciążeniu impulsowym, czyli według sposobu pierwszego.

W p. 3 przeprowadzono obliczenia według sposobu drugiego, w szczególności dla trójkątnego impulsu obciążenia. Ponadto przyjęto, że więzy nałożone na ciało uderzone mają charakterystykę nieliniową typu Duffinga.

W p. 2 wyprowadzono ogólne równania i wzory dla dowolnego sposobu obciążenia i dowolnego typu nieliniowości charakterystyk sprężyn.

Rozwiązanie nieliniowe układu równań ruchu uzyskano stosując metodę optymalnej linearyzacji, po uprzednim wprowadzeniu współrzędnych głównych.

Wyniki obliczeń zostały zilustrowane wykresami współczynników uderzenia, które uzyskano drogą rozwiązań numerycznych z pomocą komputera.

2. Linearyzacja układu zachowawczego o dwu stopniach swobody wzbudzonego uderzeniowo

Rozpatrywać będziemy układ przedstawiony na rys. 1 obciążony w ten sposób, że na masę m_1 działa siła o znanym przebiegu czasowym $P(t)$ dla $t \in [0, \tau]$, która równa się zero dla $t > \tau$. Siły sprężystości $f_1(x_1 - x_2)$, $f_2(x_2)$ są na ogół nieliniowymi, nieparzystymi funkcjami odkształcenia sprężyn, które możemy przedstawić jako sumę składnika liniowego, i nieliniowego pisząc w postaci:

$$(2.1) \quad f_1(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)k_1 - S_1(x_1 - x_2),$$

$$(2.2) \quad f_2(x_2) = k_2 x_2 - S(x_2),$$

$$(2.3) \quad S(x_2) - S_1(x_1 - x_2) = S_2(x_1 - x_2).$$

Równania ruchu układu w przedziale czasu $t \in [0, \infty]$ po uwzględnieniu (2.1 - 2.3) możemy napisać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 &= S_1(x_1 - x_2) + P(t)[H(t) - H(t - \tau)], \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_2 - k_1 x_1 &= S_2(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

z zerowymi warunkami początkowymi, gdzie $H(t)$ jest funkcją skokową Heaviside'a.

Przekształcimy te równania wprowadzając współrzędne główne q_1, q_2 układu liniowego (to jest w równaniach (2.4) przyjmujemy $S_1 = S_2 = P = 0$). Między współrzędnymi naturalnymi x_1, x_2 , a współrzędnymi głównymi q_1, q_2 zachodzą znane zależności [5], [8], [16]

$$(2.5) \quad x_1 = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2, \quad x_2 = \lambda_1 \varrho_1 q_1 + \lambda_2 \varrho_2 q_2,$$

gdzie

$$(2.6) \quad \lambda_1^2 = \frac{1}{m_1 + m_2 \varrho_1^2}, \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{m_1 + m_2 \varrho_2^2}.$$

Współczynniki postaci drgań własnych układu liniowego ϱ_1, ϱ_2 określone są wzorami

$$(2.7) \quad \varrho_1 = \frac{k_1 - m_1 \omega_{01}^2}{k_1} = \frac{k_1}{k_1 + k_2 - m_2 \omega_{01}^2},$$

$$(2.8) \quad \varrho_2 = \frac{k_1 - m_1 \omega_{02}^2}{k_1} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - m_2 \omega_{02}^2}.$$

$\omega_{01}^2, \omega_{02}^2$ są kwadratami częstości drgań własnych układu liniowego [3]

$$(2.9) \quad \omega_{01,02}^2 = \frac{k_1}{2m_1} + \frac{k_1 + k_2}{2m_2} \mp \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 + k_2}{m_2} \right)^2 - \frac{4k_1 k_2}{m_1 m_2} \right]^{1/2}.$$

Różniczkowe równania ruchu we współrzędnych głównych mają postać:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_{01}^2 q_1 &= \Phi_1(q_1, q_2) + H_1(t)[H(t) - H(t - \tau)], \\ \ddot{q}_2 + \omega_{02}^2 q_2 &= \Phi_2(q_1, q_2) + H_2(t)[H(t) - H(t - \tau)]. \end{aligned}$$

$\Phi_i, H_i, i = 1, 2$ wyznaczono obliczając pracę uogólnionych sił $S_1, S_2, P(t)$ na odpowiadających im przemieszczeniach wirtualnych $\delta x_1, \delta x_2$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \Phi_i(q_1, q_2) &= \lambda_i [\tilde{S}_1(q_1, q_2) + \varrho_i \tilde{S}_2(q_1, q_2)] \\ H_i(t) &= \lambda_i P(t), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Ażeby rozwiązać nieliniowe równania (2.10) linearyzujemy je postępując podobnie jak w metodzie Panowki — różnica polega na tym, że w metodzie przedstawionej w [7], [8] przeprowadzono linearyzację we współrzędnych naturalnych, natomiast tu przeprowadzamy linearyzację we współrzędnych głównych. Oznaczmy siły sprężystości dla nieliniowego układu równań (2.10) odpowiednio przez

$$(2.12) \quad F_i(q_1, q_2) = \omega_{0i}^2 q_i - \Phi_i(q_1, q_2), \quad i = 1, 2.$$

Nieliniowe wyrażenia (2.12) zastępujemy wyrażeniami liniowymi

$$(2.13) \quad F_i^* = \omega_i^2 q_i, \quad i = 1, 2$$

z odpowiednio dobranymi częstościami ω_1, ω_2 zastępczego układu liniowego.

Niech

$$r_{ui} = F_i - F_i^*, \quad i = 1, 2$$

oznacza różnice między funkcjami nieliniowymi (2.12) i liniowymi (2.13), zaś

$$(2.14) \quad m_{0i} = r_{ui} q_i = (F_i - \omega_i^2 q_i) q_i, \quad i = 1, 2,$$

są momentami tych odchyień.

Nieznane kwadraty częstości ω_1^2 , ω_2^2 zastępczego układu liniowego dobieramy w ten sposób, ażeby całki z kwadratów momentów odchyień

$$(2.15) \quad \begin{aligned} I_1 &= \int_D m_{\delta_1}^2 dq_1 dq_2, \\ I_2 &= \int_D m_{\delta_2}^2 dq_1 dq_2, \end{aligned}$$

$$\text{w obszarze } D = \left\{ \begin{array}{l} -Q_1 \leq q_1 \leq Q_1 \\ -Q_2 \leq q_2 \leq Q_2 \end{array} \right\}$$

miały wartość minimalną (Q_1 , Q_2 są maksymalnymi wartościami współrzędnych q_1 , q_2). Z warunków koniecznych na ekstremum funkcji $I_1(\omega_1^2, \omega_2^2)$, $I_2(\omega_1^2, \omega_2^2)$

$$(2.16) \quad \frac{\partial I_1}{\partial \omega_1^2} = 0, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \omega_2^2} = 0,$$

otrzymujemy dwa równania, z których wyznaczamy ω_1^2 , ω_2^2 :

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{5}{4Q_1^5 Q_2} \int_{-Q_1}^{Q_1} \int_{-Q_2}^{Q_2} F_1(q_1, q_2) q_1^3 dq_1 dq_2, \\ \omega_2^2 &= \frac{5}{4Q_1 Q_2^5} \int_{-Q_1}^{Q_1} \int_{-Q_2}^{Q_2} F_2(q_1, q_2) q_2^3 dq_1 dq_2. \end{aligned}$$

Amplitudy $Q_1 = \max_t q_1(t)$, $Q_2 = \max_t q_2(t)$ znajdujemy rozwiązując liniowe równania

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i &= \lambda_i P(t), & i = 1, 2 & \text{ dla } 0 \leq t \leq \tau \\ \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i &= 0, & i = 1, 2 & \text{ dla } t > \tau. \end{aligned}$$

Układ dynamiczny, którego ruch opisany jest równaniami (2.18) nazwiemy układem liniowym równoważnym. Przedstawioną metodę linearyzacji możemy również stosować do układów autonomicznych, obliczając kwadraty zastępczych częstości wzorami (2.17). Natomiast Q_1 , Q_2 znajdujemy jako maksimum (względem t) rozwiązań równań

$$(2.19) \quad \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0, \quad i = 1, 2$$

przy danych warunkach początkowych.

W teorii uderzenia szczególnie interesujący jest przypadek wymuszenia ruchu przez udzielenie tylko masie m_1 pewnej prędkości początkowej, tzn. gdy warunki początkowe są następujące:

$$(2.20) \quad x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = V_1.$$

Rozwiązując zadanie początkowe (2.19), (2.20) znajdujemy wyrażenia dla obliczenia Q_1 , Q_2 [3]

$$(2.21) \quad Q_1 = \frac{\varrho_2 V_1}{\lambda_1 \omega_1 (\varrho_2 - \varrho_1)}, \quad Q_2 = \frac{\varrho_1 V_1}{\lambda_2 \omega_2 (\varrho_1 - \varrho_2)}.$$

Obliczmy jeszcze zastępcze współczynniki sztywności k_{1z} , k_{2z} układu zlinearyzowanego. W tym celu do (2.9) zamiast k_1 , k_2 podstawiamy k_{1z} , k_{2z} . Otrzymamy wówczas

$$(2.22) \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_{1z}}{m_1} + \frac{k_{1z} + k_{2z}}{m_2} \right) \mp \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_{1z}}{m_1} + \frac{k_{1z} + k_{2z}}{m_2} \right)^2 - \frac{4k_{1z}k_{2z}}{m_1m_2} \right]^{1/2} = a_1 \mp b_1,$$

przy czym $b_1^2 = a_1^2 - c_1^2$, gdzie

$$(2.23) \quad c_1^2 = \frac{k_{1z}k_{2z}}{m_1m_2}.$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$k_{1z} = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 m_1 m_2}{k_{2z}},$$

$$k_{2z}^2 - 2a_1 m_2 k_{2z} + c_1^2 m_2 (m_1 + m_2) = 0.$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy

$$(2.24) \quad k_{1z} = \frac{2m_1 m_2 \omega_1^2 \omega_2^2}{m_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - [m_2^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 m_2(m_1 + m_2)]^{1/2}},$$

$$k_{2z} = \frac{1}{2} m_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{1}{2} [m_2^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 m_2(m_1 + m_2)]^{1/2}.$$

Zagadnienia dynamiki układu przedstawionego na rys. 1 można rozwiązywać przy użyciu rozmaitych metod, znanych w dynamice nieliniowych układów dyskretnych [1], [4]. Uzyskane wzory na zastępczą częstość własną wymagają w konkretnych przypadkach korzystania z pomocy komputera. Wydaje się jednak, że obrana droga postępowania prowadzi do celu szybciej niż np. bezpośrednio całkowanie numeryczne różniczkowych równań ruchu.

Zaproponowana linearyzacja we współrzędnych głównych q_1, q_2 ma tę zaletę w porównaniu z linearyzacją we współrzędnych naturalnych x_1, x_2 , że dla układów wzbudzonych uderzeniowo o wiele łatwiej jest wyznaczyć maksymalne wartości współrzędnych głównych niż naturalnych.

3. Rozwiązanie szczególne dla układu z nieliniowością Duffinga

Niech w układzie przedstawionym na rys. 1 charakterystyki sprężyn będą określone następująco:

$$f_1 = (x_1 - x_2)k_1,$$

$$f_2 = k_2 x_2 + k_3 x_2^3.$$

Obciążenie ma charakter impulsu trójkątnego:

$$P(t) = P_0 \frac{t}{\tau_1}, \quad \text{dla } t \in [0, \tau_1],$$

gdzie P_0 jest maksymalną wartością siły uderzenia, a τ_1 — długotrwałością jej działania. Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$b = \sqrt{\frac{k_3}{k_2}}, \quad \bar{x}_1 = bx_1, \quad \bar{x}_2 = bx_2,$$

$$\frac{k_1}{m_1} = \alpha_1^2, \quad \frac{k_2}{k_1} = c, \quad \frac{m_2}{m_1} = \beta, \quad \tau = \alpha_1 t,$$

równania ruchu sprowadzamy do postaci bezwymiarowej:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \ddot{\bar{x}}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 &= \bar{P}(\tau) & \text{dla } 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ \beta \ddot{\bar{x}}_2 + (1+c)\bar{x}_2 - \bar{x}_1 &= -c\bar{x}_2^3 = S(\bar{x}_2), \\ \ddot{\bar{x}}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 &= 0 & \text{dla } \tau > \tau_0, \\ \beta \ddot{\bar{x}}_2 + (1+c)\bar{x}_2 - \bar{x}_1 &= S(\bar{x}_2). \end{aligned}$$

\bar{x}_1, \bar{x}_2 są bezwymiarowymi współrzędnymi, $\bar{P}(\tau) = \frac{b}{m_1 \kappa_1^2} P(t)$, $\ddot{\bar{x}}_i = \frac{d^2 \bar{x}_i}{d\tau^2}$ $i = 1, 2$, $\tau_0 = \kappa_1 \tau_1$.

W celu rozwiązania układu równań (3.1) zlinearyzowano je stosując metodę podaną w p. 2.

Przekształcamy równania (3.1) wprowadzając bezwymiarowe współrzędne główne $\bar{q}_i = b\bar{q}_i$, $i = 1, 2$.

Równania te we współrzędnych głównych przyjmują postać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \ddot{\bar{q}}_i + \bar{\omega}_{0i}^2 \bar{q}_i &= \Phi_i(\bar{q}_1, \bar{q}_2) + H_i(\tau), & \text{dla } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ & & \text{dla } \tau > \tau_0, H_i(\tau) = 0, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(3.3) \quad \Phi_i = \lambda_i \varrho_i \tilde{S}(\bar{q}_1, \bar{q}_2), \quad H_i(\tau) = \lambda_i \bar{P}(\tau), \quad i = 1, 2.$$

Parametry $\lambda_i, \varrho_i, \bar{\omega}_{0i}^2$, $i = 1, 2$ są następujące

$$(3.4) \quad \lambda_i^2 = \frac{1}{1 + \beta \varrho_i^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$(3.5) \quad \varrho_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{1+c}{2\beta} \pm \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1+c}{\beta} \right)^2 - 4 \frac{c}{\beta} \right]^{1/2},$$

$$(3.6) \quad \bar{\omega}_{01,02}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1+c}{2\beta} \pm \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1+c}{\beta} \right)^2 - 4 \frac{c}{\beta} \right]^{1/2}.$$

Układ równań (3.2) zastępujemy równoważnym układem liniowym

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \ddot{\bar{q}}_i + \omega_i^2 \bar{q}_i &= \lambda_i \bar{P}(\tau), & \text{dla } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ \ddot{\bar{q}}_i + \omega_i^2 \bar{q}_i &= 0, & \tau > \tau_0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

w którym kwadraty częstości ω_1^2, ω_2^2 , obliczone wzorami (2.17), w tym przypadku będą miały postać:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}_1^2 &= \bar{\omega}_{01}^2 + c \lambda_1^2 \varrho_1^2 \left(\frac{5}{7} \lambda_1^2 \varrho_1^2 \bar{Q}_1^2 + \lambda_2^2 \varrho_2^2 \bar{Q}_2^2 \right), \\ \bar{\omega}_2^2 &= \bar{\omega}_{02}^2 + c \lambda_2^2 \varrho_2^2 \left(\lambda_1^2 \varrho_1^2 \bar{Q}_1^2 + \frac{5}{7} \lambda_2^2 \varrho_2^2 \bar{Q}_2^2 \right). \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia amplitud $\bar{Q}_1 = \max_{\tau} \bar{q}_1(\tau)$, $\bar{Q}_2 = \max_{\tau} \bar{q}_2(\tau)$ należy obliczyć maksymalne wartości funkcji będących rozwiązaniami układu równań (3.7), w którym podstawiamy za $\lambda_i \bar{P}(\tau)$ wyrażenie $\lambda_i \bar{P}_0 \tau$, gdzie $\bar{P}_0 = \frac{b P_0}{m_1 \kappa_1^2 \tau_0}$.

Z określenia współrzędnych głównych wynika, że rozwiązania które we współrzędnych naturalnych x_1, x_2 spełniają zerowe warunki początkowe, muszą je spełniać także we współrzędnych głównych.

Rozwiązanie równań (3.7), spełniające zerowe warunki początkowe, ma postać całki Duhamela

$$(3.9) \quad \bar{q}_i(\tau) = \frac{\lambda_i \bar{P}_0}{\bar{\omega}_i} \int_0^\tau t \sin \bar{\omega}_i(\tau-t) dt, \quad i = 1, 2,$$

lub

$$(3.10) \quad \bar{q}_i(\tau) = \frac{\lambda_i \bar{P}_0}{\bar{\omega}_i} \left(\frac{\tau}{\bar{\omega}_i} - \frac{\sin \bar{\omega}_i \tau}{\bar{\omega}_i^2} \right) \quad \text{dla } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad i = 1, 2.$$

Przemieszczenia $\bar{q}_i(\tau)$ są w przedziale $0 \leq \tau \leq \tau_0$ rosnącymi funkcjami czasu, co wynika z wzorów (3.10). Zatem maksymalne wartości \bar{Q}_1, \bar{Q}_2 wystąpią dla $\tau > \tau_0$.

Rozwiązanie układu równań (3.7) dla $\tau > \tau_0$ ma postać

$$(3.11) \quad \bar{q}_i(\tau) = \frac{\lambda_i \bar{P}_0}{\bar{\omega}_i} \int_0^{\tau_0} t \sin \bar{\omega}_i(\tau-t) dt, \quad i = 1, 2$$

lub

$$(3.12) \quad \bar{q}_i(\tau) = -\frac{\lambda_i \bar{P}_0}{\bar{\omega}_i^2} \left[\left(\tau_0 \sin \bar{\omega}_i \tau_0 + \frac{1}{\bar{\omega}_i} \cos \bar{\omega}_i \tau_0 - \frac{1}{\bar{\omega}_i} \right) \sin \bar{\omega}_i \tau + \left(\tau_0 \cos \bar{\omega}_i \tau_0 - \frac{1}{\bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i \tau_0 \right) \cos \bar{\omega}_i \tau \right], \quad i = 1, 2$$

Obliczone maksimum tych funkcji ze względu na τ

$$(3.13) \quad \bar{Q}_i = \frac{\lambda_i \bar{P}_0}{\bar{\omega}_i^2} A_i, \quad i = 1, 2,$$

gdzie

$$(3.14) \quad A_i = \left[\tau_0^2 + \frac{2}{\bar{\omega}_i^2} - \frac{2\tau_0}{\bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i \tau_0 - \frac{2}{\bar{\omega}_i^2} \cos \bar{\omega}_i \tau_0 \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2.$$

Celem niniejszych rozważań jest obliczenie współczynnika uderzenia μ , rozumianego jako stosunek maksymalnej siły zwrotnej w sprężynie $\max F(t)$ do maksymalnej wartości siły wymuszającej P_0 . Dla układu o dwu stopniach swobody trzeba obliczyć dwa współczynniki uderzenia

$$(3.15) \quad \mu_1 = \frac{\max F_1(t)}{P_0}, \quad \mu_2 = \frac{\max F_2(t)}{P_0},$$

gdzie:

$$F_1(t) = k_{1z}[x_1(t) - x_2(t)], \quad F_2(t) = k_{2z}x_2(t),$$

k_{1z}, k_{2z} są zastępczymi współczynnikami sprężystości układu zlinearyzowanego.

Znając współrzędne główne możemy powrócić do współrzędnych naturalnych i po odpowiednich przekształceniach napisać wzory przybliżone (wynikające z oszacowania

funkcji typu $\max_t A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \leq A + B$ dla współczynników uderzenia:

$$(3.16) \quad \mu_1 = \frac{\bar{k}_{1z}}{\tau_0} \left[\frac{\lambda_1^2 A_1 (1 - \rho_1)}{\bar{\omega}_1^2} + \frac{\lambda_2^2 A_2 (1 - \rho_2)}{\bar{\omega}_2^2} \right],$$

$$(3.17) \quad \mu_2 = \frac{k_{2z}}{\tau_0} \left(\frac{\lambda_1^2 A_1}{\bar{\omega}_1^2} \rho_1 + \frac{\lambda_2^2 A_2}{\bar{\omega}_2^2} \rho_2 \right),$$

gdzie \bar{k}_{1z} , \bar{k}_{2z} obliczono wzorami (2.24)

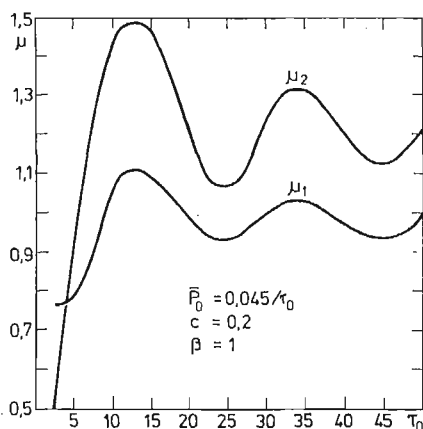
$$(3.18) \quad \bar{k}_{1z} = \frac{2\beta\bar{\omega}_1^2\bar{\omega}_2^2}{\beta(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) - [\beta^2(\bar{\omega}_1^2 - \bar{\omega}_2^2)^2 - 4\beta\bar{\omega}_1^2\bar{\omega}_2^2]^{1/2}},$$

$$\bar{k}_{2z} = \frac{1}{2} \beta(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) - \frac{1}{2} [\beta^2(\bar{\omega}_1^2 - \bar{\omega}_2^2)^2 - 4\beta\bar{\omega}_1^2\bar{\omega}_2^2]^{1/2}.$$

Częstości $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ układu zlinearyzowanego oraz współczynniki uderzenia μ_1 , μ_2 są funkcjami następujących parametrów \bar{P}_0 , c , β , τ_0 . Złożona budowa powyższych wzorów uniemożliwia przeprowadzenie wprost ogólnej dyskusji wpływu poszczególnych parametrów na wartość $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ lub μ_1 , μ_2 .

Dlatego obliczono wielkości $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, μ_1 , μ_2 jako funkcje τ_0 , traktując pozostałe parametry jako stałe.

Wyniki obliczeń przedstawia rys. 2.



Rys. 2.

4. Układ dwumasowy z nieliniowością Hertza

Dla układu jak na rys. 1 wyznaczmy maksymalną siłę w sprężynie pośredniej oraz maksymalne ugięcie sprężyny skrajnej, jeśli charakterystyki sprężyn są określono następująco:

$$f_1 = k_H \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) |x_1 - x_2|^{3/2}$$

$$\text{przy czym } \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x_1 - x_2 > 0 \\ -1 & \text{dla } x_1 - x_2 < 0 \end{cases}$$

$$f_2 = k_2 x_2, \quad P(t) = 0.$$

Przyjmujemy warunki początkowe:

$$(4.1) \quad x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = V_0.$$

Rozpatrywany układ dynamiczny modeluje uderzenie quasi-sztywnego bijaka¹⁾ w ciało quasi-sztywne nieswobodne, na które są nałożone liniowe więzy sprężyste o sztywności k_2 . Przez m_1 należy rozumieć masę bijaka, przez m_2 — masę ciała uderzonego, zredukowaną do punktu uderzenia. Sprężyna pośrednia imituje podatność lokalną (k_H) zderzających się ciał i dlatego jej charakterystykę przyjęto w postaci hertzowskiej [3].

Równania ruchu mas podczas trwania ich kontaktu są następujące:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_H \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) |x_1 - x_2|^{3/2} &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_H \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) |x_1 - x_2|^{3/2} + k_2 x_2 &= 0, \end{aligned}$$

z warunkami początkowymi (4.1).

Dodajmy z obu stron równania (4.2a) człon $k_2(x_1 - x_2)$ zaś do równania (4.2b) człon $-k_2(x_1 - x_2)$ oraz wprowadzimy oznaczenia

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{k_2}{G} &= b, & \bar{x}_1 &= bx_1, & \bar{x}_2 &= bx_2, \\ \frac{k_2}{m_2} &= \kappa^2, & \frac{m_2}{m_1} &= \beta, & \frac{k_H}{\sqrt{bk_2}} &= a, \\ \tau &= \kappa t, & \text{gdzie} & & G &= m_2 g \end{aligned}$$

i przepisemy równania (4.2) po uwzględnieniu (4.3) w postaci bezwymiarowej

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\beta} \ddot{\bar{x}}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 &= -a \operatorname{sgn}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^{3/2} + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = S_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \ddot{\bar{x}}_2 + 2\bar{x}_2 - \bar{x}_1 &= a \operatorname{sgn}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^{3/2} - \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = -S_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2). \end{aligned}$$

Przekształcamy równania (4.4) wprowadzając współrzędne główne \bar{q}_1, \bar{q}_2 układu (4.4), w którym $S_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$. We współrzędnych głównych równania (4.4) będą [5]:

$$(4.5) \quad \ddot{\bar{q}}_i + \bar{\omega}_{0i}^2 \bar{q}_i = \lambda_i (1 - \varrho_i) \tilde{S}_i(\bar{q}_1, \bar{q}_2), \quad i = 1, 2$$

gdzie:

$$(4.6) \quad \lambda_i^2 = \frac{1}{\frac{1}{\beta} + \varrho_i^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$(4.7) \quad \varrho_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta} \pm \frac{1}{2\beta} \sqrt{4 + \beta^2},$$

$$(4.8) \quad \bar{\omega}_{01,02}^2 = 1 + \frac{\beta}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{4 + \beta^2}.$$

Nieliniowy układ równań (4.5) zastępujemy układem liniowym

$$(4.9) \quad \ddot{\bar{q}}_i + \bar{\omega}_i^2 \bar{q}_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

¹⁾ Ciałem quasi-sztywnym nazywamy ciało lokalnie odkształcalne [3].

Kwadraty częstości obliczamy korzystając z wzorów (2.17), które w tym przypadku będą następujące:

$$(4.10) \quad \bar{\omega}_1^2 = \frac{5}{4\bar{Q}_2\bar{Q}_1^3} \int_{-\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_1} \int_{-\bar{Q}_2}^{\bar{Q}_2} [\bar{\omega}_{01}^2 \bar{q}_1 + aA \operatorname{sgn}(A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2) |A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2|^{3/2} - \\ - A^2\bar{q}_1 - AB\bar{q}_2] \bar{q}_1^3 d\bar{q}_1 d\bar{q}_2,$$

$$(4.11) \quad \bar{\omega}_2^2 = \frac{5}{4\bar{Q}_1\bar{Q}_2^3} \int_{-\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_1} \int_{-\bar{Q}_2}^{\bar{Q}_2} [\bar{\omega}_{02}^2 \bar{q}_2 + aB \operatorname{sgn}(A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2) |A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2|^{3/2} - \\ - AB\bar{q}_1 - B^2\bar{q}_2] \bar{q}_2^3 d\bar{q}_1 d\bar{q}_2,$$

gdzie:

$$(4.12) \quad A = \lambda_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\beta} \sqrt{4 + \beta^2} \right), \\ B = \lambda_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2\beta} \sqrt{4 + \beta^2} \right).$$

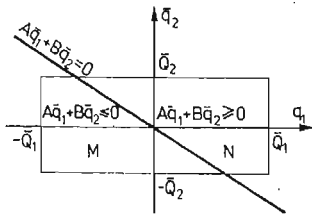
Ażeby obliczyć całki we wzorze (4.10) i (4.11) w których występuje $\operatorname{sgn}(A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2)$ należy zbadać znak wyrażeń A i B . Ponieważ $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\beta > 0$ więc $A > 0$ i $B > 0$. Dziełimy obszar całkowania na dwa obszary M i N prostą o równaniu $A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2 = 0$. Należy wyróżnić dwa przypadki przy uwzględnieniu, że $\frac{A}{B} > 0$.

— przypadek I $\bar{Q}_2 \leq \frac{A}{B} \bar{Q}_1$

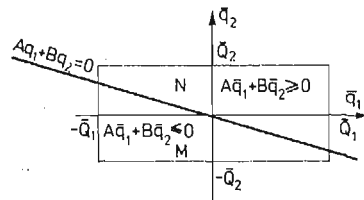
— przypadek II $\bar{Q}_2 \geq \frac{A}{B} \bar{Q}_1$

W przypadku pierwszym obszar całkowania jest podzielony jak na rys. 3, a podobszary M i N określone następująco:

$$M = \left\{ \begin{array}{l} -\bar{Q}_1 \leq \bar{q}_1 \leq -\frac{B}{A} \bar{q}_2 \\ -\bar{Q}_2 \leq \bar{q}_2 \leq \bar{Q}_2 \end{array} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{B}{A} \bar{q}_2 \leq \bar{q}_1 \leq \bar{Q}_1 \\ -\bar{Q}_2 \leq \bar{q}_2 \leq \bar{Q}_2 \end{array} \right\},$$



Rys. 3.



Rys. 4.

Dla drugiego przypadku rys. 4 mamy:

$$M = \left\{ \begin{array}{l} -\bar{Q}_1 \leq \bar{q}_1 \leq \bar{Q}_1 \\ -\bar{Q}_2 \leq \bar{q}_2 \leq -\frac{A}{B} \bar{q}_1 \end{array} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{array}{l} -\bar{Q}_1 \leq \bar{q}_1 \leq \bar{Q}_1 \\ -\frac{A}{B} \bar{q}_1 \leq \bar{q}_2 \leq \bar{Q}_2 \end{array} \right\}$$

W obszarze M spełniony jest warunek $A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2 \leq 0$, więc $\text{sgn}(A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2) = -1$, ponadto $|A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2| = -A\bar{q}_1 - B\bar{q}_2$. W obszarze N mamy $A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2 \geq 0$, więc $\text{sgn}(A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2) = 1$ oraz $|A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2| = A\bar{q}_1 + B\bar{q}_2$.

Uwzględniając powyższe po obliczeniu całek otrzymamy:

w przypadku pierwszym, czyli dla $\bar{Q}_2 \leq \frac{A}{B} \bar{Q}_1$

$$(4.13) \quad \bar{\omega}_1^2 = \bar{\omega}_{01}^2 + \frac{2a}{7B} \left\{ \frac{16}{429A^3} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^5} - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^5} \right] - \right. \\ \left. - \frac{8}{33A^2} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{11/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^4} - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{11/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^4} \right] + \frac{2}{3A} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{9/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{9/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^3} \right] - \frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{7/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^2} + \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{7/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^2} \right\} - A^2,$$

$$(4.14) \quad \bar{\omega}_2^2 = \bar{\omega}_{02}^2 + \frac{2a}{B^3} \left\{ \frac{1}{13A} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^5} - \frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^5} \right] - \right. \\ \left. - \frac{3}{11} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{11/2}}{\bar{Q}_2^5} - \frac{(A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{11/2}}{\bar{Q}_2^5} \right] + \frac{A\bar{Q}_1}{3\bar{Q}_2^5} [(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{9/2} - \right. \\ \left. - (A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{9/2}] - \frac{A^2 \bar{Q}_1^2}{7\bar{Q}_2^5} [(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{7/2} - (A\bar{Q}_1 - B\bar{Q}_2)^{7/2}] \right\} - B^2,$$

w przypadku drugim, czyli $\bar{Q}_2 \leq \frac{A}{B} \bar{Q}_1$

$$(4.15) \quad \bar{\omega}_1^2 = \bar{\omega}_{01}^2 + \frac{2a}{A^3} \left\{ \frac{1}{13B} \left[\frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^5} - \frac{(B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{13/2}}{\bar{Q}_2 \bar{Q}_1^5} \right] - \right. \\ \left. - \frac{3}{11\bar{Q}_1^5} [(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{11/2} - (B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{11/2}] + \frac{B\bar{Q}_2}{3\bar{Q}_1^5} [(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{9/2} - \right. \\ \left. - (B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{9/2}] - \frac{B^2 \bar{Q}_2^2}{7\bar{Q}_1^5} [(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{7/2} - (B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{7/2}] \right\} - A^2,$$

$$(4.16) \quad \bar{\omega}_2^2 = \bar{\omega}_{02}^2 + \frac{2a}{7A} \left\{ \frac{16}{429B^3} \left[\frac{(B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{13/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^5} - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{13/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^5} \right] - \right. \\ \left. - \frac{8}{33B^2} \left[\frac{(B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{11/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^4} - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{11/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^4} \right] + \frac{2}{3B} \left[\frac{(B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{9/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{9/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^3} \right] - \frac{(B\bar{Q}_2 - A\bar{Q}_1)^{7/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^2} + \frac{(A\bar{Q}_1 + B\bar{Q}_2)^{7/2}}{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2^2} \right\} - B^2.$$

Łatwo można wykazać, że dla warunków początkowych (4.1) maksymalne wartości współrzędnych głównych będą

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \bar{Q}_1 &= \frac{\varrho_2 \bar{V}_0}{\lambda_1 \bar{\omega}_1 (\varrho_2 - \varrho_1)}, \\ \bar{Q}_2 &= \frac{\varrho_1 \bar{V}_0}{\lambda_2 \bar{\omega}_2 (\varrho_1 - \varrho_2)}, \end{aligned}$$

gdzie: $\bar{V}_0 = \frac{b}{\kappa} V_0$.

Wartości $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ obliczono na komputerze traktując parametry a , β jako stałe, \bar{V}_0 jako zmienne. Rozwiązując układ równań (4.9) możemy powrócić do współrzędnych naturalnych \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , które będą określone następująco:

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= \lambda_1 \bar{Q}_1 \sin \bar{\omega}_1 \tau + \lambda_2 \bar{Q}_2 \sin \bar{\omega}_2 \tau, \\ \bar{x}_2 &= \lambda_1 \varrho_1 \bar{Q}_1 \sin \bar{\omega}_1 \tau + \lambda_2 \varrho_2 \bar{Q}_2 \sin \bar{\omega}_2 \tau. \end{aligned}$$

Układ równań (4.2), podobnie jak i równoważny mu (w sensie przyjętej metody rozwiązania) układ (4.9), opisuje ruch środków mas podczas ich kontaktu, czyli dla $t \in [0, \tau_k]$ gdzie τ_k jest nieznanym czasem kontaktu. Można go wyznaczyć z warunku

$$(4.19) \quad \bar{x}_1(\tau) - \bar{x}_2(\tau) = 0,$$

bowiem w końcowej chwili uderzenia przemieszczenia środków obu mas są jednakowe.

Maksymalną siłę uderzenia $\bar{F} = \max_{\tau} \bar{F}(\tau)$ wyznaczono z równania

$$(4.20) \quad \bar{F}(\tau) = \bar{k}_{1z} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2),$$

w którym $\bar{F}(\tau)$ jest bezwymiarową wielkością reprezentującą stosunek siły uderzenia $F(t)$ do ciężaru $m_2 g$, bezwymiarowa zastępcza sztywność $\bar{k}_{1z} = \frac{k_{1z}}{k_2}$ dana jest wzorem (3.18).

Wyniki obliczeń przedstawia rys. 5 i 6.

Z kolei obliczymy maksymalne ugięcie sprężyny skrajnej. Jest to wielkość o tyle interesująca, że w przyjętym modelu reprezentuje maksymalne odkształcenie ciała uderzanego, wynikające z jego podatności ogólnej. Ponieważ omawiane maksimum występuje z reguły w drugiej fazie ruchu, czyli dla $t > \tau_k$, przeto należy najpierw określić stan kinematyczny układu w chwili $t = \tau_k$ a mianowicie $x_1(\tau_k) = x_2(\tau_k)$, $\dot{x}_1(\tau_k)$, $\dot{x}_2(\tau_k)$. Postulujemy sprężysty charakter uderzenia tzn., że współczynnik restytucji $R = 1$. Dalszy ruch ciała ma więc charakter swobodnych drgań oscylatora harmonicznego o masie m_2 z liniowymi więzami sprężystymi o sztywności k_2 . Współczynnik uderzenia μ , zdefiniowany jako stosunek maksymalnego ugięcia dynamicznego sprężyny o sztywności k_2 do jej statycznego ugięcia pod ciężarem bijaka określony jest wzorem [9]

$$(4.21) \quad \mu = \beta \sqrt{\bar{x}_2^2 + \dot{\bar{x}}_2^2}.$$

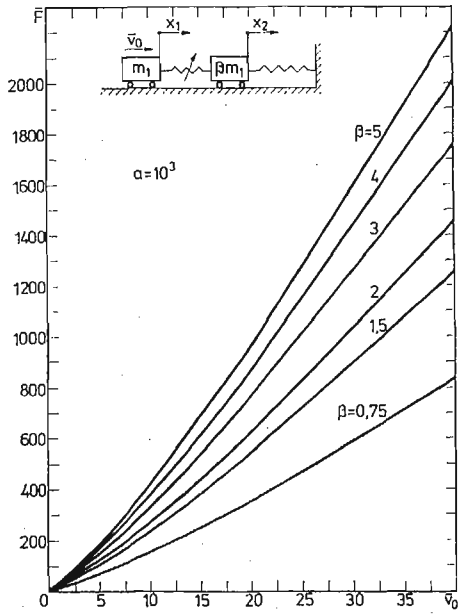
Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 7, natomiast na rys. 8 pokazano wpływ podatności lokalnej na współczynnik uderzenia.

5. Uwagi końcowe i wnioski

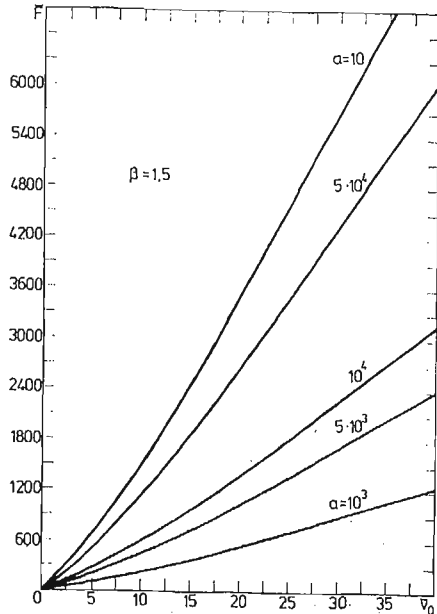
Układ dwumasowy rozpatrywany w p. 2 wraz z przyjętym sposobem obciążenia, może być modelem rozmaitych mechanizmów o działaniu udarowym. Podczas pracy takiego mechanizmu, na masę m_1 (reprezentującą np. bijak, tłok itp.) działa obciążenie

impulsowe. Druga masa połączona jest z pierwszą więzami sprężystymi, liniowymi, zaś z podłożem (tzn. osłoną, obudową, łożyskami itp.) więzami nieliniowo-sprężystymi.

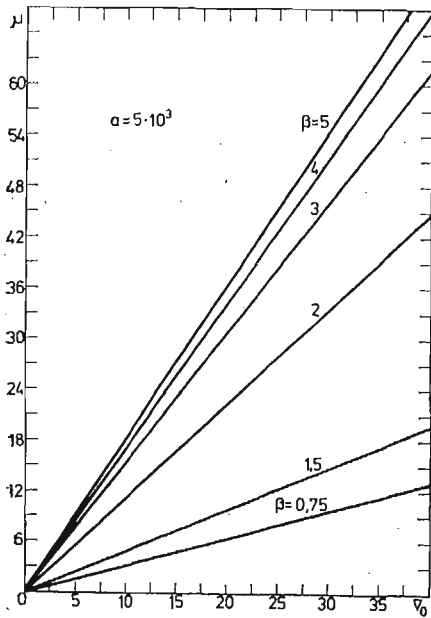
Pozwala to uwzględnić duże (geometrycznie nieliniowe) odkształcenia tego ciała, które może być uformowane na kształt belki, wału itp.



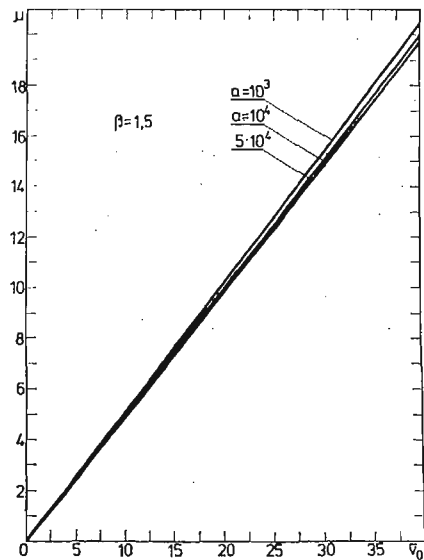
Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7.



Rys. 8.

Jak widać z rys. 2 (i wielu innych przedstawionych w pracy [15]) w zakresie badanych parametrów maksimum współczynnika μ_2 jest większe od maksimum μ_1 , a zmiany tych współczynników wraz ze wzrostem τ_0 mają charakter oscylacyjny. Ze względów wytrzymałościowych korzystne jest tak dobierać parametry układu, aby odpowiadało im lokalne minimum współczynników uderzenia. Natomiast dla układu z nieliniowością Hertza [15] można przyjąć, że μ jest funkcją tylko prędkości bijaka i stosunku mas, bowiem zmienia się on nieznacznie (w zakresie badanych sztywności) przy zmianie sztywności lokalnej (rys. 7, 8), a jego wzrost jest liniowy przy wzroście prędkości bijaka V_0 .

Na wartość maksymalnej siły uderzenia duży wpływ ma podatność lokalna α , przy czym jak widać na rys. 6 ze wzrostem podatności lokalnej rośnie wartość tej siły.

Literatura cytowana w tekście

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Москва 1958.
2. W. BOGUSZ, *Normal modes nonlinear vibrations in two degrees of freedom systems*, Zagadnienia drgań nieliniowych, PWN, Warszawa, 1963.
3. R. GRYBÓŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, PWN, Warszawa 1969.
4. С. Н. НАЯШИ, *Дрғаня нелиніове в укладах фізycznych*, WNT, Warszawa 1968.
5. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Дрғаня і фале в ціалач сталых*, PWN, Warszawa 1966.
6. Z. MAGIERA-ULLRICH, *Дрғаня нормалне укладów нелиніowych о двóх stopniach swobody*, praca doktorska, Politechnika Poznańska, 1970.
7. Я. Г. ПАНОВКО, *Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебаний*, Инж. Сборник, 13, Москва 1952.
8. Я. Г. ПАНОВКО, *Основы прикладной теории упругих колебаний*, Машиностр. Москва 1967.
9. Н. К. СНИТКО, *Динамика сооружений*, Гостройиздат, Москва 1960.
10. R. M. ROSENBERG, C. P. ATKINSON, *On the natural modes and their stability in nonlinear two-degree-of-freedom systems*, Journal of Applied Mechanics, 3, 1959.
11. R. M. ROSENBERG, *Normal modes of nonlinear dual-mode systems*, Journal of Applied Mechanics, 2, 1960.
12. P. M. РОЗЕНБЕРГ, *О свободных колебаниях нормального типа нелинейных систем общего класса с двумя степенями свободы*, Сбор. пер. иностр. статей, Механика 5, 69, 1961.
13. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Postacie drgań przy rezonansie nieliniowego układu o dwóch stopniach swobody*, Archiwum Budowy Maszyn, 9, 1962.
14. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Normal modes of a nonlinear two degrees-of-freedom system and their properties*, Zagadnienia drgań nieliniowych, 5, PWN, Warszawa 1963.
15. H. WOJCIECHOWSKI, *Uderzenie w układzie nieliniowo-dyskretnym o dwu stopniach swobody*, praca doktorska, Politechnika Śląska, 1978.
16. S. ЗЕМВА, *Аналіза дрғані*, PWN, Warszawa 1957.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТИПА ДУФФИНГА И ГЕРЦА

В статье рассматривается способ линеаризации нелинейной консервативной системы с двумя степенями свободы возбужденной непериодической нагрузкой или ударом. Линеаризацию нелинейных уравнений движения проведено после предварительного введения главных координат.

Особенно проводились исследования системы, которой движение было вынуждено нагрузкой типа трёхугольного импульса. Кроме того рассматривается двухмассовая система, в которых пружина соединяющая массы имеет характеристику типа Герца. Движение такой системы возбуждалось приданием массе m_1 начальной скорости V_0 . Для обеих систем определено динамические коэффициенты.

S u m m a r y

THE DETERMINATION OF DYNAMIC FACTORS IN A SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM AND DUFFING-HERTZ NONLINEARITY

In the paper the linearization method of the non-linear conservative system with the two degrees of freedom has been considered. The system is excited by aperiodic or impact loads. The linearization of the non-linear motion equations has been performed after having introduced the main coordinates. The system excited by triangular pulse has been tested in particular. Besides, the two-mass system with joining spring of Hertz characteristics has been considered. The system has been excited by the motion impart of the mass m_1 with the initial velocity v_0 . For both systems the dynamic factors have been introduced.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 maja 1980 roku.
