

DRGANIA KONSTRUKCJI I STOCHASTYCZNE MODELE USZKODZEŃ

KAZIMIERZ SOBČZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zagadnienia wyznaczania przemieszczeń i naprężeń powodowanych dynamicznymi obciążeniami o charakterze przypadkowym (oraz) lub fluktuacjami parametrów rozważanych układów stanowią bardzo ważny dla praktyki składnik analizy konstrukcji inżynierskich.

W ostatnim dwudziestoleciu problemy drgań konstrukcji pod wpływem obciążeń przypadkowych były badane bardzo intensywnie i w chwili obecnej istnieje bogata literatura dotycząca metod i rezultatów dynamiki stochastycznej (por. [1], [2], [3], [4], [5]). Podstawową przyczyną tych badań jest fakt, że w większości realnych sytuacji podstawowe czynniki determinujące zachowanie się konstrukcji, tak jak na przykład obciążenia zewnętrzne czy własności mechaniczne rozważanych układów mają charakter fluktuacyjny i nie mogą być opisane w zwykły — deterministyczny sposób. Odnosi się to szczególnie do obciążeń konstrukcji budowlanych powodowanych porywistym wiatrem czy działaniem fal akustycznych lub sejsmicznych, konstrukcji statków na które działają fale morskie lub szумы turbulentne itp. W takich sytuacjach ważne jest zbadanie wpływu owych stochastycznych czynników na zachowanie się konstrukcji i jej zniszczenie. Zasadniczym motywem i celem analizy drgań stochastycznych konstrukcji jest ocena ich niezawodności. Z metodycznego punktu widzenia probabilistyczną analizę konstrukcji drgających można podzielić na dwa etapy: pierwszy — dotyczy wyznaczenia statystycznych charakterystyk reakcji konstrukcji (np. przemieszczeń, naprężeń itp.), zaś celem drugiego etapu jest analiza niezawodnościowa — charakteryzująca stany niebezpieczne i dostarczająca informacji o występowaniu uszkodzeń i zniszczeniu konstrukcji.

W chwili obecnej, istniejące metody i rezultaty dynamiki stochastycznej dają możliwość wyznaczania podstawowych charakterystyk statystycznych reakcji dla szerokiej klasy układów i obciążeń stochastycznych. Problemy dotyczące niezawodności stochastycznych drgających konstrukcji nie są jednak wystarczająco zbadane.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie problemów i nowych wyników dotyczących stochastycznej analizy drgań konstrukcji, ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień niezawodnościowych. Po zwięzłym przedstawieniu metody wyznaczania charakterystyk reakcji układów ciągłych uwaga będzie skupiona na dyskusji zniszczenia spowodowanego drganiami stochastycznymi. Ponieważ uszkodzenia konstrukcji powodowane drganiami

stochastycznymi przyjmują najczęściej postać uszkodzeń zmęczeniowych, w ostatniej części pracy przedstawione zostaną stochastyczne modele uszkodzeń zmęczeniowych, w tym modele bazujące na propagacji w materiale dominującej szczeliny.

2. Reakcja konstrukcji na obciążenie stochastyczne

Rozważmy drgania technicznego układu ciągłego i założmy, że jest on sprężysty i liniowy. Dla szerokiej klasy takich układów równanie opisujące drgania można przedstawić w postaci

$$(2.1) \quad m\ddot{U} + cU + \mathcal{L}(U) = Q(r, t),$$

gdzie m i c są parametrami charakteryzującymi masę układu i tłumienie, $\mathcal{L}$ jest liniowym operatorem różniczkowym względem zmiennych przestrzennych, zaś $Q(r, t)$ jest funkcją losową zmiennych $r = (x, y, z)$ i czasu t . Dla przykładu operator $\mathcal{L}$ może mieć postać

$$(2.2) \quad \mathcal{L} = \begin{cases} -T \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2}, \\ D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \end{cases}$$

i wtedy równanie (2.1) opisuje odpowiednio drgania struny, kołowo-cylindrycznej powłoki lub płyty sprężystej. W zależności od sytuacji równanie (2.1) należy rozwiązywać z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi. Równanie (2.1) jest równaniem stochastycznym interpretowanym zwykle w sensie średnio-kwadratowym (por. [5], [6]).

Metody stochastycznej analizy układów sprężystych opisanych przez równanie (2.1) są analogiczne do metod używanych w stochastycznej dynamice układów dyskretnych (opisanych przez równania różniczkowe zwyczajne). Metoda charakterystyk impulsowych oraz metoda widmowa mogą być łatwo zastosowane. Dla zastosowania metody charakterystyk impulsowych należy znać funkcję Greena $G(r, t, r_1, t_1)$, która jest definiowana jako rozwiązanie równania

$$(2.3) \quad m\ddot{G} + cG + \mathcal{L}(G) = \delta(r - r_1) \delta(t - t_1),$$

z odpowiednimi warunkami brzegowymi i zerowymi warunkami początkowymi dla $t = t_1$.

Rozwiązanie równania (2.1) ma postać

$$(2.4) \quad U(r, t) = \int_0^t \int_D G(r, t; r_1, t_1) Q(r_1, t_1) dr_1 dt_1.$$

Gdzie D jest obszarem (powierzchnią) rozważanego układu. Na podstawie definicji wartości przeciętnej i funkcji korelacyjnej otrzymuje się

$$(2.5) \quad \langle U(r, t) \rangle = \int_0^t \int_D G(r, t; r_1, t_1) \langle Q(r_1, t_1) \rangle dr_1 dt_1.$$

$$(2.6) \quad K_U(r, t; r_1, t_1) = \langle U(r, t) U(r_1, t_1) \rangle = \\ = \int_0^t \int_0^{t_1} \int \int G(r, t; r', t') G(r_1, t_1; r'', t'') K_Q(r', t'; r'', t'') dr' dr'' dt' dt''.$$

Jako szczególny przypadek wzoru (2.6) otrzymuje się wyrażenie dla czasowej funkcji korelacji (dla ustalonego $r = r_1$) oraz przestrzennej funkcji korelacyjnej (dla ustalonego $t = t_1$). Często wystarczy znajomość wartości funkcji korelacyjnej pola $U(r, t)$ w ustalonym, wybranym (np. szczególnie wrażliwym) punkcie r ; traktuje się wtedy $U(r, t)$ jako funkcję losową tylko czasu t , czyli — jako proces stochastyczny.

Wprowadzając uogólnioną gęstość widmową pola $U(r, t)$ zgodnie z następującą definicją

$$(2.7) \quad g_U(r_1, \omega_1; r_2, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_U(r_1, t_1; r_2, t_2) e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

i analogicznie uogólnioną gęstość $g_Q(r_1, \omega_1; r_2, \omega_2)$, otrzymujemy następującą relację “widmową”:

$$(2.8) \quad g_U(r_1, \omega_1; r_2, \omega_2) = \int \int g_Q(r', \omega_1; r'', \omega_2) H(r_1, r'; \omega_1) H(r_2, r''; \omega_2) dr' dr'',$$

gdzie

$$(2.9) \quad H(r, r_1; \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(r, r_1; \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad \tau = t - t_1.$$

Jeżeli pole losowe $Q(r, t)$ jest stacjonarne w szerszym sensie i statystycznie jednorodne, to powyższe wzory znacznie upraszczają się.

Dla skorzystania z powyższych wzorów należy znać podstawowe charakterystyki obciążenia losowego $Q(r, t)$, tj. jego wartość przeciętną i funkcję korelacyjną oraz funkcję Greena $G(r, t; r_1, t_1)$. Charakterystyki obciążenia należy wyznaczyć na drodze opracowywania materiału doświadczalnego. Wyznaczenie funkcji Greena nie zawsze jest możliwe; dla stosunkowo szerokiej klasy układów liniowych zwykle stosuje się wersję metody rozdzielania zmiennych znaną w dynamice konstrukcji jako metoda modów normalnych (ang. the normal-mode approach — por. [3]).

Przytoczone wyżej wzory wyczerpująco charakteryzują reakcję konstrukcji opisanej równaniem (2.1) jeśli jej parametry materiałowe, warunki początkowe i brzegowe są deterministyczne a obciążenie $Q(r, t)$ jest gaussowską funkcją losową. Jeśli któryś z wymienionych warunków nie jest spełniony wzory (2.5) i (2.6) dają tylko częściową charakterystykę losowego pola przemieszczeń, gdyż jest ono wtedy nie gaussowskie. Często — w celu uproszczenia analizy — korzysta się z gaussowskiego przybliżenia. Jednakże problem jak dalece analiza gaussowska jest akceptowalna w problemach niegaussowskich wymaga oddzielnego badania (por. [7]).

W stochastycznej analizie układów konstrukcyjnych nieliniowych istniejące wyniki dotyczą przede wszystkim nieliniowości natury geometrycznej pochodzących z uwzględniania skończonych odkształceń (por. [3], [5]). Tego rodzaju drgania nieliniowych układów sprężystych przy wymuszeniu stochastycznym można badać za pomocą metod przybli-

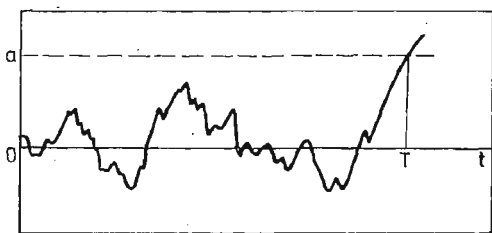
zonych będących połączeniem metod mechaniki nieliniowej i metod analizy korelacyjnej lub aparatu procesów Markowa. Pewne rezultaty dotyczące drgań stochastycznych konstrukcji sprężysto-plastycznych są zawarte w [8] (por. także [9]).

3. Drgania stochastyczne i uszkodzenia konstrukcji

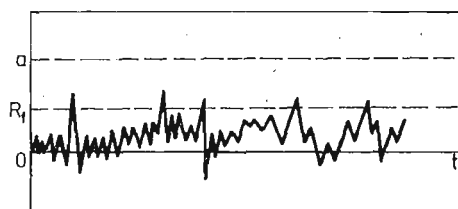
Niech $Y(t)$ oznacza dynamiczną reakcję konstrukcji (przemieszczenie, naprężenie itp.) w ustalonym punkcie krytycznym. Załóżmy, że podstawowe charakterystyki probabilistyczne procesu $Y(t)$ zostały wyznaczone metodami scharakteryzowanymi w punkcie poprzednim. Jak wykorzystać informacje o procesie $Y(t)$ w badaniu uszkodzeń powodowanych przez ten proces i w ocenie długowieczności konstrukcji?

Należy wyróżnić dwa podstawowe mechanizmy uszkodzeń związane z drganiami stochastycznymi:

1. $Y(t)$ osiąga po raz pierwszy pewien określony górny (np. a) lub dolny (np. $-b$) poziom, gdzie a i b są danymi dużymi liczbami dodatnimi; mówimy, że uszkodzenia występujące przy zajściu tego zdarzenia są *uszkodzeniami katastroficznymi* (lub uszkodzeniami pierwszego przejścia; ang. first excursion failures);
2. $Y(t)$ nie przyjmuje dużych (katastroficznych) wartości, doznaje jednak wielu nieznacznych wyjść poza granicę wytrzymałości i wobec tego zniszczenie konstrukcji akumuluje



Rys. 1



Rys. 2

się; całkowite zniszczenie następuje gdy nagromadzone uszkodzenia osiągają pewną określoną wartość; ten rodzaj zniszczenia znany jest pod nazwą *zniszczenia zmęczeniowego*. Schematycznie, powyższe rodzaje uszkodzeń są przedstawione na rysunkach (rys. 1, 2).

3.1. Uszkodzenia katastroficzne. W ocenie niezawodności konstrukcji w oparciu o pierwszy mechanizm zniszczenia istotne jest określenie czasu T w którym reakcja $Y(t)$ — np. naprężenie — osiągnie ustalony poziom po raz pierwszy. Oczywiście, czas T jest zmienną losową. Podstawowe zagadnienie w analizie uszkodzeń katastroficznych można sformułować następująco: znając własności statystyczne reakcji konstrukcji $Y(t)$ należy wyznaczyć charakterystyki probabilistyczne czasu pierwszego przejścia T .

Problemy związane z wyznaczaniem czasu pierwszego wyjścia realizacji procesu z rozważanego obszaru były rozważane w teorii procesów stochastycznych. Efektywne rozwiązania mogą być jednak otrzymane tylko dla specjalnych klas procesów np. dla dyfuzyjnych procesów Markowa; wtedy bowiem korzystając z równania Fokkera-Plancka-

Kołmogorowa dla gęstości prawdopodobieństwa przejścia procesu łatwo można wyprorowadzić równanie różniczkowe dla funkcji $R(t)$ określającej prawdopodobieństwo przebywania procesu w danym obszarze Ω przestrzeni fazowej w przedziale czasu $[0, t]$, tj. dla funkcji

$$(3.1) \quad R(t) = P\{Y(\tau) \in \Omega, 0 \leq \tau \leq t\}.$$

Niech mianowicie $Y(t) = [Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)]$ będzie n -wymiarowym dyfuzyjnym procesem Markowa charakteryzującym zachowanie się układu w czasie; procesy — składowe $Y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ w analizie drgań układów sprężystych mogą być interpretowane jako współrzędne uogólnione. Niech w chwili początkowej t_0 układ znajduje się w stanie $Y_0 = [Y_1^0, \dots, Y_n^0]$. Niech $p(y, t|y_0, t_0)$ będzie gęstością prawdopodobieństwa przejścia procesu ze stanu y_0 w chwili t_0 do stanu y w chwili t . Ta funkcja spełnia znane równanie Kołmogorowa (por. [5]). Przyjmując $t_0 = 0$ będziemy zapisywać funkcję p w postaci $p(y, t|y_0)$.

Prawdopodobieństwo (warunkowe) tego, że jeżeli układ w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie $y_0 \in \Omega$, to do chwili t nie wyjdzie z obszaru Ω jest równe:

$$(3.2) \quad P(t|y_0) = \int_{\Omega} p(y, t|y_0) dy.$$

Całkując równanie Kołmogorowa otrzymuje się następujące równanie dla funkcji $P(t|y_0)$ — por. [10]

$$(3.3) \quad \frac{\partial P}{\partial t} - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial P}{\partial y_i^0} - \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^n b_{ik} \frac{\partial^2 P}{\partial y_i^0 \partial y_k^0} = 0,$$

gdzie a_i , b_{ik} są współczynnikami charakteryzującymi infinitezymalne własności procesu $Y(t)$. Równanie (3.3) należy rozwiązywać z następującymi warunkami

$$(3.4) \quad \begin{aligned} P(0|y_0) &= 1 & \text{dla } y_0 \in \Omega \\ P(t|y_0) &= 0 & \text{dla } y_0 \in S \end{aligned}$$

gdzie S jest brzegiem obszaru Ω .

Korzystanie z równania (3.3) w analizie realnych układów jest związane z trudnościami. Zagadnienie upraszcza się gdy poszukujemy momentów czasu pierwszego wyjścia procesu z obszaru Ω , tj. wielkości

$$(3.5) \quad \langle T^k \rangle = \int_0^{\infty} t^k \frac{\partial \tilde{P}(t|y_0)}{\partial t} dt; \quad \tilde{P}(t|y_0) = 1 - P(t|y_0).$$

Dla momentów czasu pierwszego wyjścia z obszaru Ω otrzymuje się rekurencyjny układ równań

$$(3.6) \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 \langle T^k(y_0) \rangle}{\partial y_i^0 \partial y_j^0} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \langle T^k(y_0) \rangle}{\partial y_i^0} = -k \langle T^{k-1}(y_0) \rangle,$$

gdzie, w rozpatrywanym przypadku gdy Ω jest obszarem zamkniętym, $\langle T^0(y_0) \rangle = 1$. Równania (3.3) i (3.6) nazywają się *równaniami Pontriagina*. Funkcja $R(t)$ jest znana

jako funkcja niezawodności układu; prawdopodobieństwo niezawodnej pracy układu w przedziale $[0, t]$ jest bowiem równe

$$(3.7) \quad R(t) = \int_{\Omega} P(t|y_0) p(y_0) dy_0,$$

gdzie $p(y_0)$ jest gęstością prawdopodobieństwa procesu $Y(t)$ w chwili $t = 0$.

Dla przypadków kiedy reakcja konstrukcji nie może być opisana przez dyfuzyjny proces Markowa korzysta się z pewnych rozwiązań przybliżonych oraz oszacowań prawdopodobieństwa pierwszego przejścia. Szczególnie prosty rezultat otrzymuje się, jeżeli przyjmie się założenie, że przekroczenia rozważanego poziomu a przez proces $Y(t)$ są wystarczająco rzadkie i statystycznie niezależne; oznacza to, że liczba chwil losowych w przedziale $(0, t]$ w których następują przekroczenia poziomu a jest scharakteryzowana przez jednorodny proces Poissona

$$(3.8) \quad P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Wtedy prawdopodobieństwo tego, że w przedziale $(0, t]$ nie nastąpi żadne przekroczenie poziomu a jest po prostu równe

$$(3.9) \quad P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}.$$

Prawdopodobieństwo uszkodzenia katastroficznego w przedziale $(0, t]$ jest więc w tym przypadku:

$$1 - e^{-\lambda t}.$$

Oznacza to, że czas pierwszego przejścia T danego (wysokiego) poziomu a przez proces $Y(t)$ jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym. W tym przypadku

$$(3.10) \quad \langle T \rangle = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Parametr λ oznacza intensywność procesu Poissona; w zagadnieniach niezawodnościowych jest uzasadnione przyjąć, że jest on równy średniej liczbie przewyższeń poziomu a przez proces $Y(t)$ w jednostce czasu, tj.

$$(3.11) \quad \lambda = \nu_{a_i}^+ = \int_0^{\infty} \dot{y} f_Y(a, \dot{y}) d\dot{y}.$$

Wyrażenie (3.9) w którym λ jest wyrażone przez (3.11) określa niezawodność układu w równoważnym przypadku; w analizie konstrukcji zostało ono po raz pierwszy zaproponowane przez J. J. Colemana (1959 r.). Należy jednak podkreślić, że założenie iż przewyższenia poziomu a przez proces $Y(t)$ są statystycznie niezależne jest bardzo ograniczające. Nie jest ono, na przykład, akceptowalne dla procesów stacjonarnych o wąskim widmie dla których przewyższenia występują grupowo.

Bez założenia o niezależności przewyższeń wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa czasu pierwszego przejścia jest — za wyjątkiem prostych sytuacji opisanych procesem Markowa — niemożliwe. Toteż istotne znaczenie mają różne oszacowania prawdopodobieństwa pierwszego przejścia.

Najprostsze oszacowanie oparte jest na uogólnionej nierówności Czebyszewa; zakładając, że $\langle Y(t) \rangle = 0$ górne oszacowanie prawdopodobieństwa pierwszego wyjścia poza symetryczne poziomy a i $-a$ ma postać następującą

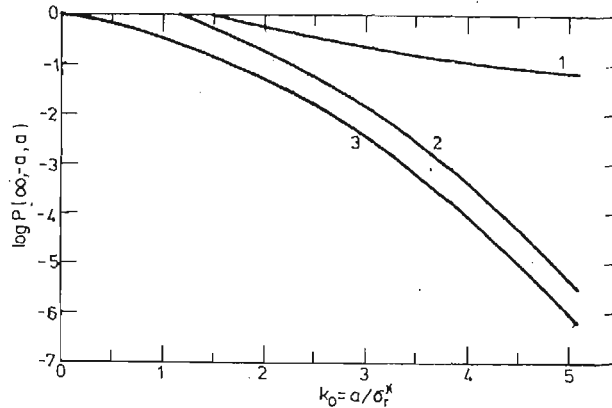
$$(3.12) \quad P\{t; -a, +a\} \leq \frac{1}{2a^2} [\sigma_Y^2(0) + \sigma_Y^2(t)] + \frac{1}{a^2} \int_0^t \sigma_Y(t) \sigma_{\dot{Y}}(t) dt$$

gdzie σ_Y^2 i $\sigma_{\dot{Y}}^2$ oznaczają odpowiednio wariancję procesu $Y(t)$ i jego pochodnej.

Dokładniejsze, górne i dolne oszacowanie prawdopodobieństwa pierwszego przejścia wyrażone przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa procesu $Y(t)$ i pochodną $\dot{Y}(t)$ zostało podane przez Shinozukę [11]. Dla układu o jednym stopniu swobody opisanego równaniem

$$m\ddot{Y} + \mu\dot{Y} + kY = mX(t),$$

gdzie proces stochastyczny $X(t)$ jest procesem gaussowskim niestacjonarnym postaci: $X(t) = H(t)e^{-\alpha\omega_0 t}Z(t)$, $H(t)$ — funkcja Hevisaide'a, $Z(t)$ — stacjonarny proces gaus-



Rys. 3. (1) górne oszacowanie; nierówność Czebyszewa, (2) górne oszacowanie wg Shinozuki, (3) dolne oszacowanie wg Shinozuki

sowski o wartości przeciętnej równej zero i danej gęstości widmowej oszacowania prawdopodobieństwa pierwszego przejścia w zależności od parametru $k_0 = \frac{a}{\sigma_Y^*}$ są przedstawione na rys. 3; σ_Y^* jest maksymalną wartością odchylenia standardowego reakcji układu (w przypadku: σ_Y^* występuje dla $\omega_0 t = 1,85$).

3.2. Uszkodzenia zmęczeniowe; „zrandomizowane” kryterium Palmgren-Minera. Zniszczenie konstrukcji pod wpływem drgań stochastycznych przyjmuje najczęściej formę zniszczenia zmęczeniowego powstającego na skutek długotrwałego oddziaływania naprężenia o charakterze pulsującym. Fizyczne zjawiska leżące u podstaw zniszczenia zmęczeniowego są bardzo złożone a ich natura nie jest jeszcze w pełni zbadana. W chwili obecnej podstawowe informacje o tym rodzaju zniszczenia czerpane są z doświadczeń przeprowadzanych w warunkach deterministycznych naprężeń cyklicznych. W takim przypadku istnieje relacja między amplitudą naprężenia i liczbą cykli powodujących zniszczenie; jest to

dobrze znana krzywa $S-N$ opisana wzorem

$$(3.13) \quad NS^b = c,$$

gdzie S jest amplitudą naprężenia, N jest niszczącą liczbą cykli, zaś b i c są dodatnimi stałymi materiałowymi. Jeżeli amplituda naprężenia zmienia się, to należy wprowadzić dodatkowe założenia. Najlepiej znaną — i ze względu na prostotę ogólnie przyjmowaną — jest hipoteza Palmgrena-Minera postulująca, że jeżeli zniszczenie pod wpływem naprężenia o danej amplitudzie występuje po N cyklach, to uszkodzenie akumuluje się w sposób jednorodny w każdym kolejnym cyklu, tak że podczas jednego cyklu następuje $\frac{1}{N}$ całkowitego zniszczenia. Zniszczenie spowodowane działaniem n_i cykli naprężenia o amplitudzie S_i $i = 1, 2, \dots$ jest równe

$$(3.14) \quad \Delta_i = \frac{n_i}{N_i}, \quad n_i \leq N_i,$$

gdzie N_i jest niszczącą liczbą cykl przy amplitudzie naprężenia S_i . Całkowite zniszczenie jest równe

$$(3.15) \quad D = \sum_i \Delta_i = \sum_i \frac{n_i}{N_i};$$

element (próbka) doznaje zniszczenia zmęczeniowego jeżeli $D = 1$.

Kryterium Palmgrena-Minera zostało zaadaptowane do przypadku obciążeń stochastycznych przez zamianę we wzorach (3.14), (3.15) symbolu n_i liczbą maksimów na poziomie S_i procesu charakteryzującego naprężenia. Oczywiście, jeżeli naprężenia są deterministyczne i cykliczne, to liczba maksimów jest równa liczbie cykli; jeżeli proces naprężenia jest stacjonarnym procesem stochastycznym o wąskim widmie to liczba maksimów równa się liczbie przecięć poziomu zerowego.

Założmy, dla lepszej przejrzystości wzorów, że reakcja konstrukcji w wybranym punkcie krytycznym jest scharakteryzowana przez stacjonarny proces stochastyczny $Y(t)$ o wąskim widmie. Niech ν_0^+ oznacza średnią liczbę przewyższeń poziomu zerowego w jednostce czasu. W czasie T średnia liczba przewyższeń poziomu zerowego jest $\nu_0^+ T$. Średnia liczba maksimów $n(a)$ o amplitudzie zawartej między a i $a+da$ jest równa

$$(3.16) \quad n(a) = \nu_0^+ T p(a) da,$$

gdzie $p(a)$ jest gęstością prawdopodobieństwa maksimów. Zgodnie z hipotezą Palmgrena-Minera każde maksimum o amplitudzie a powoduje przyrost zniszczenia równy $\frac{1}{N(a)}$, gdzie $N(a)$ jest niszczącą liczbą cykli w warunkach stałej amplitudy naprężenia a . Wartość średnia zniszczenia powodowanego wszystkimi maksimami o amplitudzie w przedziale $[a, a+da]$ jest

$$\frac{n(a)}{N(a)} = \nu_0^+ T \frac{p(a)}{N(a)} da.$$

Wartość średnia całkowitego zniszczenia $\langle D \rangle$ jest równa

$$\langle D(T) \rangle = \nu_0^+ T \int \frac{p(a)}{N(a)} da,$$

gdzie $N(a)$ należy wyznaczyć z krzywej N-S. Jeżeli $Y(t)$ jest procesem gaussowskim, to korzystając z krzywej N-S oraz podstawiając w miejsce $p(a)$ funkcję gęstości rozkładu Rayleigh'a (por. [3]) otrzymujemy

$$(3.17) \quad \langle D(T) \rangle = \frac{v_0^+ T}{c} (\sqrt{2} \sigma_r)^b \Gamma\left(1 + \frac{b}{2}\right),$$

gdzie $\Gamma(x)$ jest funkcją gamma.

A zatem, w rozważanym przypadku wartość średnia nagromadzonego zniszczenia zmęczeniowego jest proporcjonalna do średniej liczby przewyższeń poziomu zerowego oraz zależy (w sposób nieliniowy) od wariancji losowego procesu naprężenia. Wzór (3.17) daje możliwość wyznaczenia czasu T_F charakteryzującego długowieczność konstrukcji, tj. czas potrzebny do tego aby wartość średnia całkowitego zniszczenia osiągnęła wartość jeden.

Jeżeli proces stochastyczny charakteryzujący reakcję konstrukcji jest niestacjonarny, to odpowiednie wzory są o wiele bardziej skomplikowane.

Kryterium Palmgrena-Minera jest hipotezą, której podstawowa zaleta polega na jej prostocie. Dane doświadczalne wskazują bowiem istotne braki tego kryterium. A oto najważniejsze z nich:

- 1) doświadczalnie stwierdza się, że jeżeli zmienne obciążenie wywołuje naprężenia charakteryzujące się bardzo dużą liczbą maksimów (nie przekraczających granicy zmęczenia), to zniszczenie może wystąpić również wtedy gdy $\sum \frac{n_i}{N_i} < 1$;
- 2) w doświadczeniach stwierdza się, iż wielkość akumulowanego zniszczenia w sposób istotny zależy od kolejności występowania naprężeń o różnych amplitudach, czego kryterium Palmgrena-Minera nie uwzględnia.

Należy podkreślić, że kryterium Palmgrena-Minera (oraz inne podobne kryteria zniszczenia) jest jedynie inżynierską metodą szacowania nagromadzających się uszkodzeń bardziej lub mniej słuszną w zależności od konkretnych sytuacji i nie stanowi w żadnej mierze wyjaśnienia złożonego i w istocie swej stochastycznego mechanizmu zniszczenia zmęczeniowego. W celu bardziej adekwatnego opisu tego zjawiska zostały zaproponowane pewne modele stochastyczne.

4. Stochastyczne modele zniszczenia zmęczeniowego

4.1. Zniszczenie zmęczeniowe jako proces Markowa. Zgodnie z istniejącymi poglądami proces zniszczenia zmęczeniowego (od powstania pierwszych odkształceń plastycznych w słabszych ziarnach poprzez pojawienie się i rozwój pęknięć mikroskopowych i makroskopowych) jest procesem stochastycznym. Opis tego procesu zajmował uwagę wielu autorów (por. [12], [13], [14], [15]).

Bardzo ogólny, stochastyczny opis zniszczenia otrzymamy traktując rozważaną próbkę materiału (lub element konstrukcji) jako pewien układ którego stan mechaniczny jest scharakteryzowany przez n -wymiarowy proces stochastyczny $X(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]$; jest uzasadnione przyjąć, że $0 \leq X_j(t) \leq 1$, przy czym wartość 0 odpowiada stanowi

idealnemu zaś wartość 1 — całkowitemu zniszczeniu. Oznaczając łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa procesów składowych przez $p(x, t) = p(x_1, \dots, x_n; t)$ można formalnie wypisać równanie „kinetyczne” opisujące ewolucję zniszczenia w czasie:

$$(4.1) \quad \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \mathcal{L}[p(x, t); Q(t), \Theta(t)],$$

gdzie $\mathcal{L}$ jest operatorem działającym na funkcje występujące w nawiasie; $Q(t)$ — oznacza zespół odpowiednich parametrów charakteryzujących wymuszenie zewnętrzne, $\Theta(t)$ — parametr charakteryzujący pole temperatury.

W takim sformułowaniu problem polega na skonstruowaniu operatora $\mathcal{L}$ na bazie informacji o oddziaływaniu elementów „pierwotnych” próbki i rozkładzie prawdopodobieństwa wytrzymałości.

Naturalny i stosunkowo prosty opis otrzymuje się przyjmując, że proces zniszczenia jest procesem Markowa. Scharakteryzujemy dokładniej tę ideę.

Założmy, że próbka (lub ogólniej — układ) może znajdować się w jednym z $n+1$ stanów: $E_0, E_1, \dots, E_n$. Stan E_0 odpowiada elementowi idealnemu, zaś stan E_n charakteryzuje pewien określony stan końcowy zniszczenia. Przejścia układu z jednego stanu do innego możliwe są tylko w wyniku przejść od stanu poprzedniego do następnego, tj. według schematu:

$$E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \dots \rightarrow E_{i-1} \rightarrow E_i \rightarrow \dots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow E_n.$$

Niech $P_{ij}(s, t)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że układ który w chwili s znajdował się w stanie E_i będzie w chwili $t > s$ znajdował się w stanie E_j ; $P_{ij}(s, t)$ są prawdopodobieństwami przejścia rozważanego procesu Markowa.

Zgodnie z określeniem

$$(4.2) \quad \begin{aligned} P_{ii}(s, s) &= 1, \quad P_{ij}(s, s) = 0, \quad j > i, \\ \sum_{j=1}^n P_{ij}(s, t) &= 1 \quad \text{dla dowolnych } s, t \geq s. \end{aligned}$$

Ze względu na możliwość przechodzenia tylko do stanu następnego $P_{ij}(s, t) = 0$ dla $j < i$, wobec czego macierz $\mathbf{P} = \{P_{ij}(s, t)\}$ jest macierzą trójkątną, przy czym przyjmuje się iż $P_{nn}(s, t) = 1$ (oznacza to, że jeżeli układ znalazł się w jakiejś chwili w stanie E_n , pozostaje w nim na zawsze z prawdopodobieństwem 1; stan E_n jest pochłaniający).

Niech zgodnie z teorią skokowych procesów Markowa $q_i(t)$ oznacza intensywność przejścia układu ze stanu E_i w chwili t do stanu E_{i+1} w nieskończenie małym przedziale czasu $(t, t + \Delta t)$. Oczywiście, $q_n(t) = 0$. Prawdopodobieństwa przejścia P_{ij} spełniają znane równania Kolmogorowa

$$(4.3) \quad \frac{\partial P_{ii}(s, t)}{\partial t} = -q_i(t)P_{ij}(s, t),$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial P_{ij}(s, t)}{\partial t} = -q_i(t)P_{ij}(s, t) + q_{j-1}(t)P_{i, j-1}(s, t), \quad j > 1,$$

z warunkami początkowymi (4.2).

Rozwiązując równania (4.3), (4.4) wyznaczamy prawdopodobieństwa przejścia $P_{ij}(s, t)$. Z kolei, trwałość (lub funkcja niezawodności) elementu (układu) jest scharakteryzowana przez $P_{on}(0, t)$, tj. przez prawdopodobieństwo przejścia ze stanu E_0 do stanu E_n .

Dla ilustracji założymy, że intensywności przejścia $q_i(t)$ są funkcjami postaci

$$(4.5) \quad q_i(t) = q_i \varphi(t).$$

W takim przypadku, wprowadzając nową zmienną

$$(4.6) \quad x = \int_0^t \varphi(z) dz,$$

sprowadzamy równania (4.3), (4.4) do równań o stałych współczynnikach

$$(4.7) \quad \frac{\partial Q_{ii}(x)}{\partial x} = -q_i Q_{ii}(x),$$

$$(4.8) \quad \frac{\partial Q_{ij}(x)}{\partial x} = -q_i Q_{ij}(x) + q_{j-1} Q_{i,j-1}(x),$$

gdzie $Q_{ij}(x)$ są funkcjami związanymi z $P_{ij}(s, t)$ przy pomocy przekształcenia (4.6). Względem zmiennej x rozważany proces jest więc procesem jednorodnym. Warunki „początkowe” mają postać

$$(4.9) \quad Q_{ii}(0) = 1, \quad Q_{ij}(0) = 0, \quad j > i.$$

Funkcja niezawodności jest więc

$$(4.10) \quad P_{on}(0, t) = Q_{on}(x) = Q_{on} \left(\int_0^t \varphi(z) dz \right).$$

W przypadku gdy $q_i = q_j = q$ dla wszystkich $0 \leq i \leq j \leq n-1$ otrzymujemy równania różniczkowe odpowiadające procesowi Poissona; ich rozwiązanie ma postać

$$(4.11) \quad Q_{j-i}(x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j-i)!}.$$

Jeżeli $q_i(t) = q = \text{const}$, to prawdopodobieństwo przejścia ze stanu E_0 do stanu E_j jest równe

$$(4.12) \quad Q_{0j}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

Ponieważ $\sum_{j=0}^{\infty} Q_{0j}(t) = 1$, to prawdopodobieństwo zniszczenia zmęczeniowego próbki (układu), będące prawdopodobieństwem przejścia do stanu E_j , $j \geq n$ jest równe

$$(4.13) \quad P(t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\lambda t} x^n e^{-x} dx.$$

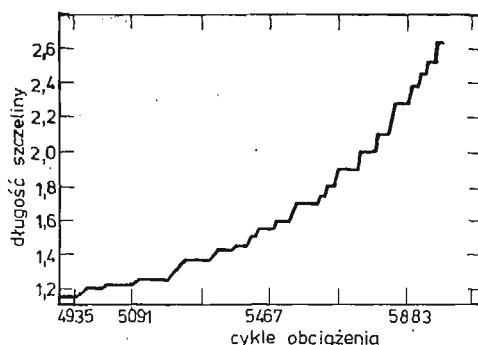
A zatem, długowieczność układu ma rozkład gamma.

Zastosowanie wyżej scharakteryzowanego modelu zniszczenia wymaga właściwego doboru funkcji intensywności $q_i(t)$. Niestety w chwili obecnej brak jest ilościowych kry-

teriów pozwalających szacować postać funkcji $q_i(t)$. Toteż sprawdzianem poprawności przyjętej postaci funkcji intensywności może być tylko wymaganie dobrej zgodności teorii z doświadczeniem. Niezależnie od powyższego, w celu oszacowania postaci funkcji $q_i(t)$ konieczny jest wybór bardzo konkretnego modelu mechanicznego próbki, której zmęczenie badamy; por. np. [13].

4.2. Wzrost szczeliny jako stochastyczny proces punktowy. Ogólnie przyjmuje się, że proces zmęczenia zachodzi w wyniku formowania się i rozwoju szczelin. Doświadczenia pokazują jednak, że chociaż w badanej próbce może pojawić się bardzo dużo szczelin, to zawsze istnieje jedna „dominująca” szczelina, która jest głównie odpowiedzialna za ostateczne zniszczenie. Uzasadnione jest więc opisywanie procesu zmęczenia przez badanie wzrostu dominującej szczeliny. Takie podejście zostało zaproponowane przez VELLURI'EGO w pracy [16] i jest obecnie ogólnie akceptowane. Z drugiej strony, wiadomo, że parametry materiałowe, geometria próbki, charakter obciążenia i inne czynniki wpływają na proces nagromadzania się uszkodzeń zmęczeniowych w sposób bardzo skomplikowany, wobec czego proces ten może być adekwatnie opisany jedynie jako proces stochastyczny.

W tym punkcie pokażemy jak można charakteryzować stochastyczny proces wzrostu dominującej szczeliny wychodząc z obserwacji danych doświadczalnych. Dane te — przedstawione na rys. 4 wskazują, że „uzasadnione jest przyjąć, iż dominująca szczelina



Rys. 4 (wg [16])

wzrasta w sposób przerywany i wzrost ten zawiera okresy aktywności i „drzemki” (patrz [16], s. 764). Biorąc powyższe pod uwagę wydaje się naturalne aby charakteryzację procesu wzrostu dominującej szczeliny oprzeć na następujących postulatach:

- 1) w chwili t_0 istnieje dominująca szczelina o długości L_0 wystarczającej do propagacji;
- 2) wzrost szczeliny odbywa się skokami o losowej wielkości; będziemy oznaczali przez $F(l)$ — dystrybucję długości skoku, tj. prawdopodobieństwo, że jeżeli szczelina wzrasta, to jej przyrost ΔL jest mniejszy od 1;
- 3) wzrost szczeliny obserwowany w czasie zachodzi w losowo rozłożonych na przedziale $[t_0, \infty)$ chwilach: $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$; liczba „skoków” w długości szczeliny jest losowa w każdym ustalonym przedziale czasu — będziemy tę zmienną losową oznaczali przez N , a jej rozkład przez $(n_k; p_k)$.

W celu otrzymania bardziej efektywnych rezultatów konieczne jest przyjęcie założenia, że:

4) zmienne losowe charakteryzujące wielkość przyrostu szczeliny L oraz liczbę skoków we wroście szczeliny N są niezależne.

A. Uproszczony model „statyczny”.

Używając postulatów 1) — 3) lub 1) — 4) należy wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa $G(x)$ całkowitej długości szczeliny L_{t0t} w końcu ustalonego przedziału czasu, tj.

$$(4.14) \quad G(x) = P\{L_{t0t} < x\}.$$

Oznaczając przez $G_k(x)$ prawdopodobieństwo warunkowe, że jeżeli liczba skoków wynosi k , to całkowity wzrost szczeliny spowodowany tymi skokami jest mniejszy od x , tj.

$$G_k(x) = P\{L_{t0t} < x | N = k\}.$$

Szukane prawdopodobieństwo $G(x)$ jest wtedy równe

$$(4.15) \quad G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k G_k(x).$$

Założmy, dla uproszczenia, że przyrosty długości szczeliny ΔL_k są statystycznie niezależne wtedy

$$(4.16) \quad G_k(x) = \int_0^x G_{k-1}(x-l) dF(l) = G_{k-1}(x) * F(x).$$

Niech liczba skoków w długości szczeliny ma rozkład Poissona

$$(4.17) \quad p_k = P\{N = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

wtedy

$$(4.18) \quad G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} G_k(x),$$

$$\langle L_{t0t} \rangle = \int_0^{\infty} x dG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \int_0^{\infty} x dG_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} km = \lambda m,$$

gdyż średnia rozkładu G_k jest km ; m — oznacza wartość średnią rozkładu F ;

$$(4.19) \quad \langle L_{t0t}^2 \rangle = \int_0^{\infty} x^2 dG(x) = \lambda \alpha_2 + \lambda^2 m^2,$$

gdzie

$$\alpha_2 = \int x^2 dF(x).$$

Niech długości przyrostu szczeliny będą scharakteryzowane klasą rozkładów gamma, tj.

$$(4.20) \quad f(x) = F'(x) = \frac{a^{b+1}}{\Gamma(b+1)} x^b e^{-ax}, \quad x \geq 0, \quad b > -1;$$

wtedy

$$(4.21) \quad G(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} + \int_0^{ax} \varphi(z) dz, & x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(4.22) \quad \varphi(z) = \lambda z^b e^{-(\lambda+z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z^{b+1})^k}{T(k+1)(b+1)(k+1)!}.$$

Dla rozkładu wykładniczego ($b = 0$)

$$(4.23) \quad \varphi(z) = \lambda e^{-(\lambda+z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!(k+1)!}.$$

Rozkład wykładniczy przyrostów szczeliny odpowiada sytuacjom kiedy większym przyrostom odpowiadają mniejsze prawdopodobieństwa, zaś mniejszym przyrostom większe prawdopodobieństwa; wydaje się, iż może on stanowić dobre przybliżenie w wielu realnych przypadkach. Parametr α można szacować z danych doświadczalnych.

Jeżeli $\sqrt{\lambda z}$ jest wielkością bardzo małą wtedy szereg (4.23) jest szybko zbieżny i wartości funkcji $\varphi(z)$ można łatwo obliczyć. Jeżeli $\sqrt{\lambda z}$ staje się duże, to bezpośrednie sumowanie szeregu (4.23) jest bardzo pracochłonne. Wtedy jednak można skorzystać z asymptotycznych własności funkcji Bessela gdyż ich zmodyfikowana postać jest związana z (4.23). Nawet dla stosunkowo małych wartości $\sqrt{\lambda z}$ ($\sqrt{\lambda z} > 3$) następujące rozwinięcie daje wystarczająco dokładne wartości dla $\varphi(z)$, mianowicie

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{\lambda}{z}} \frac{e^{-(\sqrt{\lambda z} - \sqrt{\lambda})}}{2\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\lambda z}} \left\{ 1 - \frac{3}{16} (\sqrt{\lambda z})^{-1} - \frac{15}{512} (\sqrt{\lambda z})^{-2} - \right. \\ \left. - \frac{105}{8192} (\sqrt{\lambda z})^{-3} - \frac{4725}{524288} (\sqrt{\lambda z})^{-4} - \frac{72765}{8388608} (\sqrt{\lambda z})^{-5} \right\}.$$

B. Wzrost szczeliny jako proces punktowy

W celu scharakteryzowania zniszczenia zmęczeniowego jako procesu należy w pełni uwzględnić postulat 3). Załóżmy, że próbka poddana losowemu obciążeniu doznaje maksymalnych naprężeń „męczących” $S_1, S_2, \dots$ w losowych chwilach $t_1, t_2, \dots$

Niech $N(t)$ będzie stochastycznym procesem punktowym reprezentującym liczbę punktów t_i w przedziale czasu $(0, t]$ w których występują zdarzenia powodujące wzrost dominującej szczeliny. Oznaczmy przez ΔL_i przyrost szczeliny następujący w losowej chwili t . Całkowita długość szczeliny w dowolnej chwili t może być wyrażona w postaci: $L_{tot}(t) = L_0 + L_F(t)$, gdzie

$$(4.24) \quad L_F(t) = \sum_i \Delta L_i H(t - t_i),$$

gdzie

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

lub w postaci całkowej

$$(4.25) \quad L_F(t) = \int_0^t \Delta L(\tau) dN(\tau),$$

Wartość przeciętna i wariancja $L_{i0t}(t)$ przy założeniu, że wielkości przyrostów ΔL_i szczeliny w różnych chwilach t_i są niezależne i mają jednakowy rozkład $F(x)$ lub $f(x)$, są równe

$$(4.26) \quad \langle L_{i0t}(t) \rangle = L_0 + \int_0^t \langle dN(\tau) \rangle \int_0^\infty xf(x) dx = \\ = L_0 + \langle N(t) \rangle \langle \Delta L \rangle = L_0 + m \langle N(t) \rangle.$$

W celu wyznaczenia wariancji należy skorzystać z produktowych funkcji gęstości rzędu drugiego wprowadzonych do opisu procesów punktowych (por. [17]). Otrzymujemy

$$(4.27) \quad \langle L_F^2(t) \rangle = \int_0^t \int_0^t \langle dN(\tau_1) dN(\tau_2) \rangle \langle \Delta L(\tau_1) \Delta L(\tau_2) \rangle = \\ = \int_0^t \int_0^t g_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \left[\int_0^\infty xf(x) dx \right]^2 + \int_0^t \langle dN(\tau) \rangle \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \\ = m^2 \int_0^t \int_0^t g_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \alpha_2 \langle N(t) \rangle.$$

gdzie $g_2(\tau_1, \tau_2)$ jest produktową funkcją gęstości rzędu drugiego procesu $N(t)$ definiowaną następująco

$$g_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \langle dN(\tau_1) dN(\tau_2) \rangle,$$

jeżeli infinytezymalne przedziały d_1, d_2 są rozłączne, zaś gdy d_1, d_2 zachodzą na siebie

$$\langle dN(\tau_1) dN(\tau_2) \rangle|_{d\tau_1=d\tau_2} = \langle [dN(\tau_1)]^2 \rangle = \langle dN(\tau_1) \rangle = g_1(\tau_1) d\tau_1.$$

Jeżeli proces punktowy $N(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona o intensywności λ , tj.

$$P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

to

$$g_1(\tau) = \lambda, \quad g_2(\tau_1, \tau_2) = \lambda^2$$

i wobec tego

$$(4.28) \quad \langle L_{i0t}(t) \rangle = L_0 + \lambda m, \\ \langle L_F^2(t) \rangle = \lambda \alpha_2 + m^2 \lambda^2 t^2, \\ v_{ar} L_{i0t}(t) = \lambda \alpha_2 - m \lambda^2 + m \lambda^2 t^2.$$

Rozważania przedstawione w tym punkcie dotyczą jedynie nagromadzania się uszkodzeń zmęczeniowych lub inaczej — wzrostu dominującej szczeliny. Nie wspominaliśmy nic o tym jak i kiedy szczelina zaczyna wzrastać oraz jaka jej długość powoduje zniszczenie. Proces zarodkowania szczeliny jest skomplikowany. Dane doświadczalne wska-

zują, że przy dużych amplitudach naprężenia szczeliny pojawiają się już w pierwszych cyklach obciążenia. W przypadku drgań stochastycznych wydaje się, że można z wystarczającym przybliżeniem zaniedbać okres zarodkowania szczeliny przyjmując, że pojawia się ona wystarczająco wcześniej w procesie obciążenia. Założona „początkowa”, długość dominującej szczeliny (lub jej rozkład) powinna być szacowana doświadczalnie.

Druga wspomniana kwestia dotyczy krytycznej długości dominującej szczeliny. Krytyczna długość L_{cr} szczeliny zależy od wielu czynników, np. przyłożonych naprężeń S , temperatury Θ , własności materiału (np. modułu Younga E) itp. Symbolicznie, można zapisać

$$(4.29) \quad L_{cr} = L_{cr}(S, \Theta, E, \xi)$$

gdzie ξ oznacza zespół możliwych innych czynników, które, w zależności od sytuacji, należy uwzględnić w obliczeniach. Zależność długości szczeliny od odpowiednich parametrów może być oszacowana z doświadczeń. Wydaje się, że dla wykorzystania modeli scharakteryzowanych wyżej może być użyta pewna zmodyfikowana postać kryterium Griffith'a, orzekająca że

$$(4.30) \quad L_{cr} = \frac{B}{S^\alpha}$$

gdzie B i α są stałymi; np. α zmienia się od 2 — dla materiałów kruchych do 5 — dla materiałów ciągliwych. Pełna teoretyczna analiza tego zagadnienia, jak również właściwe powiązanie parametrów przedstawionych modeli z charakterystykami procesu obciążenia i własności materiału pozostają problemami otwartymi.

Literatura cytowana w tekście

1. W. W. BOŁOTIN; *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Warszawa, Arkady, 1968.
2. В. В. Болотин; *Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений*. Изд. Литер. по строительству, Москва, 1971.
3. Y. K. LIN; *Probabilistic theory of structural dynamics*, Mc-Graw Hill Comp., 1967.
4. K. PIŚCZEK; *Metody probabilistyczne w teorii drgań nieliniowych*, Wyd. Polit. Poznańskiej, 1974.
5. K. SOBCZYK; *Metody dynamiki statystycznej* Warszawa, PWN, 1973.
6. И. И. ГИХМАН; *Асимптотическое поведение решений смешанной задачи описывающих случайные вынужденные колебания*, Прикл. Мех., Т. XIII., № 11, 1977.
7. K. SOBCZYK; *Use of Gaussian analysis in non-gaussian problems*, Mech. Eng. Dept., Univ. of Glasgow, 1976.
8. В. А. Пальмов; *Колебания упруго-пластических тел*, Изд. Наука, 1976.
9. K. DOLIŃSKI; *Stochastyczna analiza konstrukcji sztywnoplastycznych*, Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa, 1977.
10. В. И. Тихонов, М. А. Миронов; *Марковские процессы*, Москва, Сов. радио, 1977.
11. M. SHINOZUKA; *Probability of Structural Failure under Random Loading*, J. Eng. Mech., Div., Amer. Soc. Civil Engrs., 90 (EM5), 147 - 170, 1964.
12. С. В. СЕРГЕНСЕН, В. П. КОГАЕВ; *Стохастические теории накопления усталостных повреждений* Машиностроение, № 3, 1966.
13. В. В. Болотин; *Некоторые математические и экспериментальные модели процессов разрушения*, Проблемы прочности, № 2, 1971.
14. J. L. BOGDANOFF; *A new cumulative damage model*, J. Appl. Mech., 45, Nr 2, June 1978.

15. K. SOBCZYK; *On some stochastic model for fatigue crack propagation*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Techn. Sci., XXVII, 5/6, 1979.
16. R. S. VELLURI; *Some recent developments at GALCIT Concerning a Theory of Metal Fatigue*, Acta Metallurgica, 11, pp. 759 - 775, 1963.
17. S. K. SRINIVASAN; *Stochastic point processes and Atheir applications*, Griffin, London, 1973.

Р е з ю м е

СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
РАЗРУШЕНИЯ

В работе представлены проблемы и новые результаты связанные со случайными колебаниями и надежностью упругих систем. По коротком описании основных методов стохастической динамики конструкции рассматриваются некоторые вероятностные модели усталостного разрушения. Характеризованы Марковские модели процесса накопления усталостных повреждений, а также некоторые модели связанные с распространением усталостной трещины.

S u m m a r y

RANDOM VIBRATIONS AND STOCHASTIC MODELS FOR STRUCTURAL
FAILURES

The objective of the paper is to present the problems and new results concerned with random vibrations of continuous structural systems with a special emphasize to associated reliability problems. After a short description of basic methods of stochastic dynamics of structural systems the attention is focused on probabilistic models for fatigue failures. The stochastic Marcovian models for fatigue accumulation and some models associated with fatigue crack propagation are discussed in detail.

IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 grudnia 1978 roku
