MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 15 (1977)

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE BELEK HIPERSTATYCZNYCH NA DRODZE ANALITYCZNEJ I BADAŃ ELASTOOPTYCZNYCH

TADEUSZ LISZKA, WOJCIECH ŚWISTERSKI,
MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

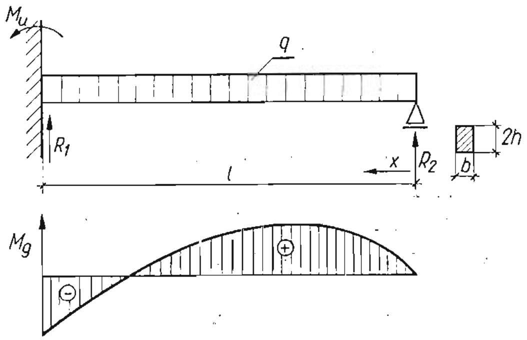
Optymalne kształtowanie belek sprężystych przy spełnieniu warunku wytrzymałościowego sprowadza się z reguły do tzw. kształtów równomiernej wytrzymałości. Jednakże warunek równomiernej wytrzymałości na czyste zginanie prowadzi do zerowych powierzchni przekroju w miejscach zerowania się momentu zginającego; wynik taki nie jest ani poprawny teoretycznie z uwagi na występowanie tam naprężeń stycznych, ani nie stwarza możliwości realizacji praktycznej.

W obecnej pracy zajmiemy się optymalizacją belek hiperstatycznych uwzględniając oprócz naprężeń σ_x nie tylko naprężenia styczne τ_{zx}, lecz również naprężenia normalne σ_z. W przypadku belek niepryzmatycznych składowe te na ogół nie zerują się we włóknach skrajnych o największych naprężeniach σ_x. Jako zmienną kształtowania przyjmiemy wysokość prostokątnego przekroju belki $h = h(x)$ ptzy ustalonej szerokości $b =$ const. Takie ujęcie zezwoli na weryfikację doświadczalną uzyskanego wyniku metodą elastooptyczną w jej najprostszym wariancie. Przyjęte kryterium jest mianowicie równoważne warunkowi wystąpienia tego samego rzędu izochromy na zewnętrznym nieobciążonym brzegu belki, gdzie panuje jednoosiowy stan naprężenia o kierunku stycznym do konturu. Jeżeli na nieobciążonym konturze zewnętrznym wystąpi w istocie stały rząd izochromy, to świadczy to o wyrównaniu naprężeń tam występujących. W dotychczasowej literaturze poświęcono kilka prac optymalnemu kształtowaniu belek przy uwzględnieniu naprężeń stycznych. KUTKOW i CZEŁNOKOW [1] badają belkę prostokątną swobodnie podpartą na dwóch podporach. Dowodzą, że uwzględnienie naprężeń stycznych ma niewielki, pomijalnie mały wpływ na objętość belki. W innej pracy [2] CZEŁNOKOW analizuje belki z uwzględnieniem także warunku sztywności. HAUG i KIRMSER [3] optymalizują kształt belki swobodnie podpartej na dwóch podporach przy ograniczeniu ugięcia i uwzględnieniu ciężaru własnego. Narzucone ograniczenia dotyczą także głównego naprężenia normalnego i maksymalnego stycznego, obliczonego jednak jak dla belki pryzmatycznej. MARTISZJUS [4, 5] podaje wzory na kształt belek prostokątnych, swobodnie podpartych, przy uwzględnieniu — obok zginania i ściskania — także wpływu siły podłużnej. Nie podaje jednak żadnych przykładów. Naprężenia styczne mogą odegrać większą rolę przy kształtowaniu belek cienkościennych (GRYCZ [6]).

Metoda elastooptyczna dla weryfikacji teoretycznych wyników optymalizacji kształtu była również stosowana. IOSIPESCU [7] stosował metodę elastooptyczną do weryfikacji optymalnego kształtu wspornika. OWCZAREK [8] podał sposób doświadczalnej — elastooptycznej optymalizacji kształtu połączeń słupów z belkami.

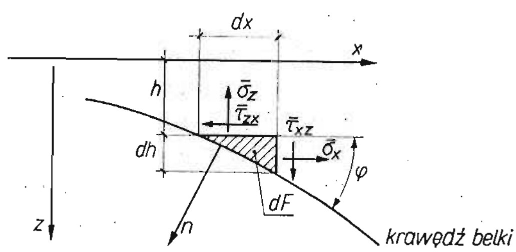
2. Sformułowanie zadania

Do rozważań przyjęto przykładowo belkę jednokrotnie hiperstatyczną utwierdzoną na jednym końcu i swobodnie podpartą na drugim (rys. 1). Zakłada się, że naprężenie zredukowane we włóknach skrajnych belki jest większe od naprężenia zredukowanego



Rys. 1

w jej osi, na całej jej długości. Założenie to będzie sprawdzone na końcu pracy. Przy przyjęciu zasady wyrównania naprężeń w skrajnych włóknach belki przy stałej jej szerokości b wysokość belki $2h$ musi ulegać zmianie. Zmienność wymiarów belki prowadzi do powstania stanu naprężenia zilustrowanego na rys. 2. Naprężenia τ_{zx} i σ_z we włóknach skrajnych,



Rys. 2

oznaczone przez $\bar{\tau}_{zx}$ i $\bar{\sigma}_z$ można będzie obliczyć wprost z warunków brzegowych, bez analizy ich rozkładu w przekroju belki. Można mianowicie napisać następujące warunki równowagi trójkątnego elementu:

$$\begin{aligned} dF\cos\varphi\bar{\tau}_{zx} - \bar{\sigma}_x dF\sin\varphi &= 0, \\ dF\cos\varphi\bar{\sigma}_z - \bar{\tau}_{zx} dF\sin\varphi &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

z których wynikają następujące wzory na naprężenia:

$$\bar{\tau}_{zx} = \bar{\sigma}_x \cdot \frac{dh}{dx}, \tag{2.2}$$

$$\bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_x \left(\frac{dh}{dx}\right)^2, \tag{2.3}$$

przy czym przyjmiemy, że $\bar{\sigma}_x$ jest z dostateczną dokładnością wyznaczone wzorem elementarnej wytrzymałości materiałów

$$\bar{\sigma}_x = \frac{M(x)}{J(x)} \cdot h(x)$$

gdzie $M(x)$ oznacza moment zginający, zaś $J(x) = \frac{2}{3} bh^3(x)$ — moment bezwładności przekroju belki względem osi obojętnej zginania.

Wzory (2.2) i (2.3) obowiązują dla nieobciążonej krawędzi belki, mogą jednak być stosowane również w przypadku działania obciążenia ciągłego q, bowiem z reguły $q \ll \bar{\sigma}_x$.

Przy pomocy ogólnie znanych zależności dla płaskiego stanu naprężenia można łatwo wykazać, że w rozpatrywanym elemencie istnieje jednoosiowy stan naprężenia, a jedyne niezerowe naprężenie ma kierunek styczny do krawędzi belki. Jego wartość wynosi

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_x \left[1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2\right]. \tag{2.4}$$

Przyjęcie zasady wyrównania naprężeń prowadzi do następującej zależności:

$$|\sigma_1| = \sigma_0 \tag{2.5}$$

gdzie σ_0 jest naprężeniem dopuszczalnym.

Dla belek statycznie niewyznaczalnych charakterystyczne jest przechodzenie wykresu momentu zginającego przez wartość zerową. W miejscu zmiany znaku momentu warunek kształtowania (2.5) będzie spełniony jedynie w granicy, mianowicie przy $\bar{\sigma}_x \to 0$ otrzymamy $dh/dx \to \infty$.

Przyjmijmy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\eta = \frac{h}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad r = \frac{R_2}{ql}, \quad p_1 = \frac{4\sigma_0 b}{3\sqrt{3}\, q}. \tag{2.6}$$

Podstawiając (2.6) do (2.4) z uwzględnieniem (2.5) i (2.3) otrzymujemy następujące równanie, określające optymalną wysokość belki $\eta = \eta(\xi)$:

$$\eta'^2 - \eta^2 \cdot \frac{\sqrt{3}\, p_1}{|2r\xi - \xi^2|} + 1 = 0. \tag{2.7}$$

Powyższe równanie jest równaniem nieliniowym pierwszego rzędu, dla którego napisać można następujące warunki brzegowe

$$\eta'(r) = \eta'(1) = 0 \tag{2.8}$$

omówione szczegółowo w rozdziale 3.

Wymaga ono jednak dodatkowego warunku dla wyznaczenia niewiadomej reakcji r. Warunku tego nie można sformułować bez jednoczesnego rozwiązania równania różniczkowego linii ugięcia belki. Jest ono równaniem drugiego rzędu, przy czym dla belek hiperstatycznych dysponujemy dodatkowymi warunkami brzegowymi, których jest tyle, ile wynosi stopień hiperstatyczności belki, a które można «wypożyczyć» dla rozwiązania równania (2.7). Równanie różniczkowe linii ugięcia belki przyjmiemy w formie zlinearyzowanej

$$EJ(x)w''(x)+M(x) = 0, \tag{2.9}$$

a po sprowadzeniu do postaci bezwymiarowej

$$\eta^3(\xi)u''(\xi)+2r\xi-\xi^2 = 0, \tag{2.10}$$

gdzie $u = 4Eb/3g \cdot w/l$ jest bezwymiarowym ugięciem.

Warunki podparcia belki dostarczają następujących trzech warunków brzegowych:

$$u(0) = u(1) = u'(1) = 0, \tag{2.11}$$

z których dwa dowolne wykorzystać można do przeprowadzenia całkowania równania (2.10), natomiast trzeci posłuży do wyznaczenia reakcji r.

Problem sformułowany powyżej równaniami (2.7), (2.10), (2.11), daje się rozwiązać efektywnie przy pomocy maszyny cyfrowej. Dla celów obliczeniowych, należy przekształcić równania (2.7), (2.10), (2.11) do postaci:

$$\frac{d\eta(\xi)}{d\xi} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}\,p_1\eta^2(\xi)}{|2r\xi-\xi^2|}-1}, \tag{2.12.1}$$

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = v(\xi), \tag{2.12.2}$$

$$\frac{dv(\xi)}{d\xi} = -\frac{2r\xi-\xi^2}{\eta^2(\xi)}, \tag{2.12.3}$$

$$u(0) = u(1) = v(1) = 0.$$

Ostateczną objętość belki wyznaczymy ze wzoru

$$V(r) = \int_0^1 \eta(\xi; r)d\xi. \tag{2.13}$$

3. Rozwiązanie numeryczne

Równanie wyznaczające profil belki (2.12.1) można całkować niezależnie od równań linii ugięcia, gdyż sprzężenie między tymi równaniami występuje jedynie poprzez niewiadomy parametr r.

Dla dowolnie przyjętej (jeszcze nieznanej) wartości r równanie (2.12.1) posiada w przedziale [0, 1] dwa punkty osobliwe (dla $\xi = 0$ i $\xi = 2r$). Wyznaczono więc przybliżone rozwinięcie funkcji $\eta(\xi)$ w otoczeniu tych punktów osobliwych. Ze względu na symetrię funkcji $\eta(\xi)$ w przedziale $[0, 2r]$ względem punktu r, jej rozwinięcie w otoczeniu obu punktów osobliwych można przedstawić wspólnym wzorem:

$$\eta(\zeta) = \eta_0 + \eta_1 \zeta^{1/2} + \eta_2 \zeta + \eta_2 \zeta^{3/2} + \ldots, \tag{3.1}$$

gdzie

$$\zeta = \begin{cases} \xi \\ |\xi - 2r| \end{cases}. \tag{3.2}$$

Podstawiając (3.1) do (2.12.1) i porównując współczynniki przy tych samych potęgach otrzymuje się wielkości $\eta_1, \eta_2 \ldots$ wyrażone poprzez nieznaną wielkość przekroju η_0 w punkcie osobliwym:

$$\eta_1 = \eta_0 \sqrt{\frac{2\sqrt{3}\,p_1}{r}},$$

$$\eta_2 = \eta_0 \frac{\sqrt{3}\,p_1}{r}, \tag{3.3}$$

$$\eta_3 = \eta_0 \left[\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}\,p_1}}{12} + \frac{\sqrt{2p_1}\,p_1}{\sqrt[4]{3}} \right) r^{-3/2} - \frac{\sqrt{2r}}{3\sqrt[4]{3p_1}\,\eta_0} \right].$$

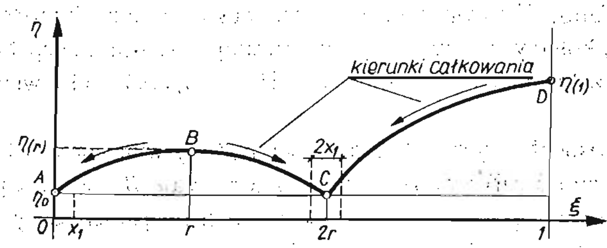
Z postaci rozwinięcia (3.1) wynika, że:

1° Wysokość belki w punkcie osobliwym iest skończona ($\eta_0 \neq 0$), zatem nie pojawia się przegub, jak w klasycznym rozwiązaniu uwzględniającym jedynie naprężenie σ_x.

2° Nachylenie brzegu belki w punkcie osobliwym dąży do ∞ (człon $\eta_1 \zeta^{1/2}$ w równaniu (3.1)).

Dla $\zeta \leqslant x_1$ (gdzie x_1 przyjęto dla zapewnienia odpowiedniej dokładności obliczeń) profil belki wyznaczono z rozwinięcia (3.1), natomiast w pozostałym obszarze otrzymano go z numerycznego całkowania równania (2.12.1).

Rozwiązanie numeryczne metodą Rungego-Kutty było stabilne jedynie wtedy, gdy całkowanie przeprowadzono w kierunku malejących wartości $\eta(\xi)$, czyli od B do A, B do C, oraz D do C (rys. 3). Wyznaczenie profilu belki wymagało więc znalezienia war-

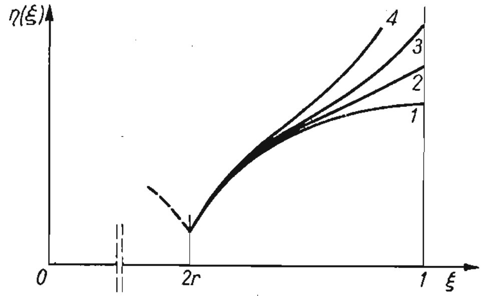


Rys. 3

tości początkowych $\eta(\xi)|_{\xi=r}$ oraz $\eta(\xi)|_{\xi=1}$. Wykorzystując warunek symetrii $\eta'(\xi)|_{\xi=r} = 0$ otrzymano pierwszy warunek początkowy w postaci

$$\eta(\xi)|_{\xi=r} = \frac{r}{\sqrt{\sqrt{3}\,p_1}}. \tag{3.4}$$

Z warunku tego wyznaczono rozwiązanie $\eta(\xi)$ w przedziale $[r, x_1]$ i porównując otrzymaną wartość $\eta(x_1)$ z tą samą wartością otrzymaną z szeregu (3.1) wyznaczono wartość współczynnika η_0. Przy całkowaniu w przedziale $[2r+x_1, 1]$ naturalne wydało się wykorzystanie warunku ciągłości w punkcie $x = 2r+x_1$ do wyznaczenia wartości początkowej $\eta(1)$. Przeprowadzone obliczenia wykazały jednak, że warunek ciągłości był spełniony z przyjętą dokładnością niezależnie od przyjętej wartości $\eta(1)$ (rys. 4). Wykorzystano to



Rys. 4

do przeprowadzenia dodatkowej minimalizacji objętości belki przyjmując najmniejszą możliwą wartość wysokości belki w przekroju utwierdzonym (krzywa *1*)

$$\eta(\xi)|_{\xi=1} = \sqrt{\frac{2r-1}{\sqrt{3}\,p_1}} \tag{3.5}$$

(przy której $\eta'(1) = 0$).

Dla ostatecznego wyznaczenia kształtu belki należy wyznaczyć wartość reakcji r. Wykorzystano do tego celu równania ugięć belki (2.12.2) i (2.12.3). Całkowano je metodą Rungego-Kutty 4 rzędu, wykorzystując jako warunki początkowe równania (2.11.2, 3). Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej Odra 1204 z wykorzystaniem bibliotecznej procedury «Runge-Kutta 4» z automatycznym wyborem kroku całkowania. Reakcję r wyznaczono drogą kolejnych przybliżeń, wykorzystując ostatni, nie spełniony dotychczas warunek $u(0) = 0$, z którego otrzymano wartość $r = 0{,}30807$ odpowiadającą optymalnemu rozwiązaniu.

Mimo bardzo czasochłonnych obliczeń (różne metody wyznaczania funkcji η w kilku przedziałach, konieczność całkowania równań w przedziale BC w dwu przeciwnych kierunkach) otrzymano rozwiązanie z dokładnością trzech miejsc znaczących.

We wszystkich obliczeniach numerycznych wartość parametru p wynosiła 44,06, a wyniki obliczeń, które przedstawia tablica 1, uzyskano dla wartości $r = 0{,}30807$. Odpowiednia minimalna wartość bezwymiarowej objętości $V = 0{,}035214$.

Kształt belki otrzymany w niniejszej pracy jest podobny do uzyskanego przez Olhoffa [9], który analizuje optymalny kształt z uwagi na drgania belek utwierdzonych.

Dla porównania przeprowadzono obliczenia $\eta(\xi)$ przy nieuwzględnieniu dodatkowych naprężeń $\bar{\sigma}_z$ i $\bar{\tau}_{zx}$. Wychodząc z warunku wyrównania naprężeń na zewnętrznych włóknach

Tablica 1. Wyniki obliczeń numerycznych kształtu belki

ξ	η	ξ	η
1,000	0,070 922	0,640	0,016 246
0,980	0,070 322	0,626	0,011 028
0,950	0,067 792	0,617	0,004 779
0,920	0,064 263	0,615	0,004 589
0,900	0,061 638	0,566	0,020 232
0,880	0,058 890	0,516	0,026 887
0,860	0,056 058	0,466	0,031 081
0,840	0,053 157	0,416	0,033 204
0,820	0,050 191	0,366	0,034 615
0,800	0,047 156	0,316	0,035 265
0,780	0,044 041	0,266	0,033 621
0,760	0,040 829	0,166	0,031 081
0,740	0,037 495	0,116	0,028 557
0,720	0,034 001	0,066	0,022 949
0,700	0,030 290	0,020	0,014 509
0,680	0,026 264	0,001	0,007 806
0,660	0,021 736	0,000	0,002 474

belki $\bar{\sigma}_x = \sigma_0$, przy przyjęciu wielkości bezwymiarowych według (2.6) otrzymujemy następujące równanie:

$$\eta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}\,p_1}\sqrt{|2r\xi-\xi^2|}\,. \tag{3.6}$$

Ze względu na pojawienie się przegubu w punkcie $\xi = 2r$ belka przestaje być hiperstatyczną i warunki równowagi pozostają spełnione niezależnie od przyjętej wartości r. Dlatego też, odmiennie niż poprzednio, całkowanie linii ugięcia nie pozwoli wyznaczyć wartości r. Umożliwia to przeprowadzenie dodatkowej optymalizacji.

Wstawiając (3.6) do równania (2.13) otrzymujemy po efektywnym scałkowaniu wyrażenie na objętość belki

$$V(r) = \frac{1}{2}(1-r)\sqrt{1-2r} + \frac{1}{2}r^2\ln\frac{r}{1-r-\sqrt{1-2r}} + \frac{1}{2}\pi r^2. \tag{3.7}$$

Warunek minimum objętości, $dV/dr = 0$ dostarcza następującego równania:

$$\pi r - \sqrt{1-2r} + r\ln\frac{1-\sqrt{1-2r}}{1+\sqrt{1-2r}} = 0. \tag{3.8}$$

Równanie powyższe posiada rozwiązanie $r = 0{,}3273$, której to wartości odpowiada wartość objętości $V = 0{,}03362$. Jest to wartość nieco niższa od objętości belki otrzymanej przy uwzględnieniu naprężeń $\bar{\sigma}_z$ i $\bar{\tau}_{zx}$.

Ten sam wynik można otrzymać całkując linię ugięcia przy dodatkowym założeniu, że linia ugięcia i jej pochodne są ciągłe również w punkcie $\xi = 2r$.

Dla kontroli przyjętego na wstępie założenia odnośnie największego wytężenia we włóknach skrajnych przeprowadzono następujące rozważanie: szukane jest $\xi_{\min}$, dla którego naprężenie zastępcze na krawędzi zewnętrznej jest równe naprężeniu zastępczemu na osi belki

$$\sigma_{red}|_{z=h} = \sigma_{red}|_{z=0} \tag{3.9}$$

KRZYŚ i ŻYCZKOWSKI podają [10] wzór (1.6.4) na τ_{zx} w osi obojętnej belki o zmiennej wysokości

$$\tau_{zx}|_{z=0} = \frac{3}{2}\tau_{śr}\left[1 - \frac{M}{T\cdot h}\frac{dh}{dx}\right].$$

Przy przyjęciu (2.4) oraz faktu, że

$$\sigma_{red}\Big|_{z=0} = \sqrt{3}\,|\tau_{zx}|\Big|_{z=0}$$

(według hipotezy Hubera-Misesa), otrzymujemy następujące równanie:

$$\frac{|M|}{h}\left[1 + \frac{3}{2}\left|\frac{dh}{dx}\right| + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left|\frac{dM}{dx}\right|. \tag{3.10}$$

Przyjęto następnie wielkości bezwymiarowe (2.6) oraz dwa pierwsze wyrazy szeregu (3.1) i znaleziono przy pomocy maszyny cyfrowej wartość $\xi_{min} = 0{,}00233$. Wartość ta jest znacznie mniejsza od uzyskanej przez innych autorów, pomijających τ_{zx} i σ_z we włóknach skrajnych. Uzyskany wynik wskazuje, że w bezpośrednim otoczeniu podpory oraz punktu $\xi = 1-2r$, gdzie $M = 0$ (rys. 1) ma miejsce odstępstwo od przyjętego założenia. Jest ono niewykrywalne na drodze elastooptycznej, bowiem podpora jest miejscem przyłożenia siły skupionej, a w miejscu zerowania się momentu zginającego, pomijając dokładność realizacji obciążenia ciągłego, wobec małej wysokości belki występuje przestrzenny stan naprężenia.

4. Podobieństwo modelowe

Przed przystąpieniem do weryfikacji doświadczalnej na drodze elastooptycznej wyprowadzono odpowiednie prawo podobieństwa mechanicznego rządzące niniejszym doświadczeniem.

Traktujemy jako prototyp belkę, która została obliczona przy pomocy maszyny cyfrowej dla przyjętej wartości p_1. Szukany jest kształt belki modelowej, dla której parametr obciążenia p_1^* jest różny od przyjętego do obliczeń.

Dla wyprowadzenia prawa podobieństwa załóżmy, że zmieniamy obciążenie i szukamy nowego przekroju belki, przy którym naprężenie w skrajnych włóknach nie ulegnie zmianie

$$p_1^* = kp_1, \quad \eta^* = n\cdot\eta. \tag{4.1}$$

Wstawiając (4.1) do (2.7) otrzymujemy:

$$n^2\eta'^2 - n^2\eta^2\frac{kp_1\sqrt{3}}{|2r\xi-\xi^2|} + 1 = 0, \tag{4.2}$$

$$\eta'^2 - \eta^2\frac{p_1\sqrt{3}}{|2r\xi-\xi^2|} + 1 = 0. \tag{2.7}$$

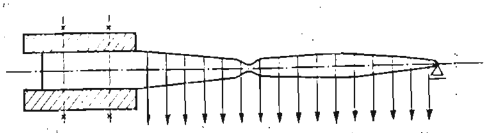
Z powyższych równań można wyprowadzić następujące prawo podobieństwa modelowego, wiążące podziałkę obciążeń k i podziałkę wysokości belki n

$$n = \sqrt{\frac{1}{\eta'^2(k-1)+k}}, \tag{4.3}$$

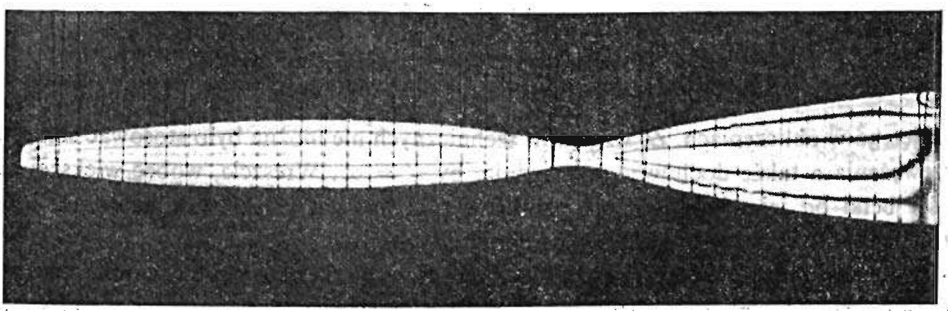
w którym istotną rolę odgrywa wartość pochodnej kształtu belki. Prawo to pozwala obliczyć zmienność kształtu równomiernej wytrzymałości przy zmienionym obciążeniu.

5. Badania elastooptyczne

Do badań przyjęto belkę wykonaną z materiału elastooptycznego PSM-1 produkcji Photolastic Inc. Grubość belki $b = 1/4'' = 6{,}35$ mm. Obciążenie belki ciągłe zostało przybliżone za pomocą 40 specjalnych ciężarków ołowianych o masie 0,2 kg każdy, wiszących na nitkach na belce w odstępach 0,5 cm. Dokładność modelu w stosunku do wynikających z tablicy 1 wymiarów wynosi $\pm 0{,}3$ mm. Belkę umieszczono w kołowym polaryskopie firmy Zeiss Jena i obserwowano w ciemnym polu widzenia w świetle sodowym żółtym. Fotografia na rys. 6 przedstawia wynik doświadczenia. W tablicy 2 zamieszczono wyniki



Rys. 5



Rys. 6

pomiarów rzędu izochrom przy pomocy metody Senarmonta, zdjęte na dolnej krawędzi belki w punktach pomiarowych co 0,5 cm poczynając od utwierdzonego końca belki. Fotografia pokazuje dosyć dobre wyrównanie rzędu izochrom wzdłuż dolnej krawędzi belki. Nieco niższe wytężenie w lewej części belki należy przypisać niedokładności utwierdzenia. Wyznaczono średnią arytmetyczną rzędów izochromy $\overline{m}$ dla punktów $2 \div 14$ i $17 \div 39$.

W obliczeniach pominięto punkty krańcowe belki oraz 2 punkty położone w miejscu silnego przewężenia. Zgodność obrazu elastooptycznego z przewidywaniami teoretycznymi w miejscu silnego przewężenia nie może być analizowana. W miejscu tym obciążenie ciągłe wywierane na belkę za pośrednictwem ciężarków odbiega poważnie od idealnego,

Tablica 2. Wyniki pomiarów elastooptycznych

Nr punktu	rz. izochrom	Nr punktu	rz. izochrom
1	—	21	3,10
2	2,63	22	3,08
3	2,67	23	3,04
4	2,65	24	3,07
5	2,64	25	3,09
6	2,68	26	3,11
7	2,64	27	3,06
8	2,65	28	3,06
9	2,64	29	3,06
10	2,67	30	3,04
11	2,68	31	3,11
12	2,71	32	3,10
13	2,75	33	3,07
14	2,92	34	3,09
15*	3,21	35	3,08
16*	4,10	36	3,05
17	3,22	37	3,04
18	2,95	38	3,10
19	3,03	39	3,12
20	3,08	40	—

Średnia arytmetyczna rzędu izochromy $\overline{m} = 2{,}936$,
odchylenie standardowe $S_m = 0{,}202$,
współczynnik zmienności $W_s = \dfrac{Sm}{\overline{m}} = 6{,}88\%$,
* punkty nie wzięte do obliczeń średniej arytmetycznej

przyjętego w obliczeniach. Ze względów technicznych nie można było stosować silniejszego przewężenia a także dochować wymagania, by $\eta' = \infty$. Wreszcie, wobec większej szerokości belki od jej wysokości, nie panuje w tym miejscu płaski stan naprężeń, którego istnienie zakłada się w modelach elastooptycznych.

Dokonano także obliczeń odchylenia standartowego S_m oraz współczynnika zmienności $W_s = S_m/\overline{m}$. Zmniejszenie rozbieżności między wynikami teoretycznymi a doświadczalnymi mogłoby nastąpić dopiero po zwiększeniu dokładności obu tych podejść. Z jednej strony rozwiązanie teoretyczne nie uwzględnia obciążenia q w warunkach brzegowych dla skrajnych włókien poddanych działaniu tego obciążenia (górnych) i naprężeń stykowych. Z drugiej strony błąd badań doświadczalnych związany jest z niedokładnością obciążenia i odstępstwami od idealnego utwierdzenia.

Literatura cytowana w tekście

1. А. И. Кутков, Р. В. Челноков, *Влияние касательных напряжений от перезывающих сил на объем балки равного сопротивления при продольно-поперечном изгибе*. В сб.: *Материалы Научно-технической конференции по строительной механике и строительным конструкциям*, 1966 г., Казань 1963, 70—75.

2. Р. В. Челноков, *Проектирование балок равного сопротивления по продольно-поперечному изгибу*. В сб.: *Материалы второй конференции молодых научных работников*, Секция физ.-техн. и механ. математ., Казань 1965, 141—151.
3. E. Haug Jr, P. G. Kirmser, *Minimum weight design of beams with inequality constraints on stress and deflections*, Trans. ASME, E. **34** (1967) 999 - 1004.
4. А. П. Мартишюс, *К расчету изгибаемых элементов с переменной высотой поперечного сечения*, Лит. Механ., Сб. 1967, 16—20.
5. А. П. Мартишюс, *Касательные напряжения переменного сечения*, Научные труды Высших Учебных Заведений Лит. ССР, Механика 2, 1966, 71—75.
6. J. Grycz, *Wyznaczanie kształtów izostatycznych belek skrzynkowych o zmiennych grubościach pólek i środników*, Zesz. Nauk. Polit. Warsz. 68, (1963), 53 - 60.
7. N. Iosipescu, *Cercetări teoretice si experimentale asupra grinzilor cu inăltime variabila*. An. Univ. Bucuresti. Ser. Stiint. Natur. Matem.-Mecan., **15** (1966) 63 - 86.
8. S. Owczarek, *Metoda wyznaczania optymalnych kształtów słupów monolitycznych połączonych z belkami, na podstawie elastooptycznych badań modelowych*, Pr. zb. *Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych*, Cz. 1. PAN, Biuro Kadr Naukowych i Spraw Osobowych, Ossolineum 1968.
9. N. Olhoff, *Maximizing higher order eigenfrequencies of beams with constraints on the design geometry*, DCAMM Rept. 108. Sept. 1976.
10. W. Krzyś, M. Życzkowski, *Sprężystość i plastyczność*, Zadania i przykłady, PWN 1962.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК ПУТЕМ РАСЧЕТА И ФОТОУПРУГИХ ИСПЫТАНИЙ

В работе сделана попытка определить оптимальную форму балки, свободно опертой на одном конце и защемленной на другом, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. Вычисления учитывают добавочные напряжения σ_z и τ_{zx}, возникающие в краевых волокнах балки из-за изменения ее высоты. Приведены основные уравнения и показан процесс их интегрирования. По результатам численных вычислений подготовлена фотоупругая модель. Экспериментальные испытания подтвердили теоретические выводы.

Summary

OPTIMUM DESIGN OF STATICALLY INDETERMINATE BEAMS BY ANALYTICAL AND PHOTO-ELASTIC METHODS

In the paper an attempt is made of determining the optimal shape of a cantilever beam of constant width subjected to uniformly distributed load and simply supported at the other end.

Additional stresses σ_z and τ_{zx} appearing as a consequence of variable height of the beam are considered. All necessary equations are presented and the procedure of solving them is shown. In accordance with numerical results, the photoelastic model of the beam has been made and investigated in a circular polariscope. Experiments showed a satisfactory agreement with theoretical results.

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW
KONSTRUKCJI MASZYN POLITECHNIKI
KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 stycznia 1977 r.