MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 15 (1977)

O SUMOWANIU PEWNYCH SZEREGÓW FOURIERA-BESSELA

KRZYSZTOF GRYSA (POZNAŃ)

Przy rozważaniu zagadnień termosprężystości, dotyczących wyznaczania pól mechanicznych i pola temperatury w walcu kołowym w przypadku, gdy dane na jego pobocznicy wielkości są funkcjami kąta, otrzymane rozwiązania mają postać szeregów Fouriera-Bessela. Tego typu szeregi mogą pojawić się również w innych zagadnieniach, zwłaszcza gdy są one rozpatrywane w cylindrycznym układzie współrzędnych.

W pracy niniejszej wyznaczono sumy szeregów postaci

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}^{s} J_{n+k}(\mu_{ni}x) J_{n+l}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 \pm a^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})},$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $s, k, l = 0, 1,$ μ_{ni} — i-te miejsce zerowe funkcji Bessela $J_n(\mu)$, a — dowolna stała rzeczywista różna od zera, $x, y \in (0, 1\rangle$.

Sumy szeregów typu (1) są znane w pewnych szczególnych przypadkach dla $n = 0$ oraz $x = 1$ (por. [1, 2, 3] i in.). Jednakże sumy szeregów postaci (1) nie były dotychczas — jak się wydaje — publikowane.

Metodę wyznaczania sum szeregów tego typu podał WOELKE [3], który jednakże ograniczył się tylko do przypadku $n = 0$. Polega ona na wykorzystaniu tzw. całki Lommela [4, 5]

$$(2)\qquad \int_a^b x U_n(\lambda x) V_n(\mu x)\,dx = \frac{1}{\lambda^2-\mu^2}\left[U_n(\lambda x)\mu x V_n'(\mu x) - V_n(\mu x)\lambda x U_n'(\lambda x)\right]_a^b,$$

gdzie $\lambda \neq \mu$ — dowolne liczby rzeczywiste lub zespolone, $b > a \geqslant 0$,
$U_n(x)$, $V_n(x)$ — rozwiązania równania Bessela [2],

$$f'(u) \equiv \frac{df}{du}.$$

1. Szereg podstawowy

Rozważmy ciąg funkcji $\{t_{(n)m}(x; y)\}_{m=1,2,\ldots}$, określony następująco:

$$(3)\qquad t_{(n)m}(x; y) = \begin{cases} 2x \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{J_n(\mu_{ni}x) J_n(\mu_{ni}y)}{J_{n+1}^2(\mu_{ni})} & \text{dla} \quad x \in \langle 0,1\rangle \\ 0 & \text{dla} \quad x \in R\langle 0,1\rangle. \end{cases}$$

Tutaj y jest pewną liczbą z przedziału $\langle 0,1\rangle$.

Funkcje $t_{(n)m}(x; y)$ są lokalnie całkowalne oraz mają następujące własności:

i) $\bigwedge_{M>0} \bigvee_{c<+\infty} \left| \int\limits_{x_1-y}^{x_2-y} t_{(n)m}(x; y)dx \right| < C$ dla $|x_1-y|, |x_2-y| < M \quad (m = 1, 2, ...)$,

ii) dla dowolnych $x_1 \neq y$, $x_2 \neq y$, $x_1 \leqslant x_2$

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{x_1-y}^{x_2-y} t_{(n)m}(x; y)dx = \begin{cases} 0, & \text{gdy } (x_1-y)(x_2-y) > 0, \\ 1, & \text{gdy } (x_1-y)(x_2-y) < 0. \end{cases}$$

Własności i) oraz ii) funkcji $t_{(n)m}(x; y)$ są pokazane w monografii WATSONA ([2], rozdz. XVIII). Jak zatem wynika ze znanego twierdzenia o ciągach funkcyjnych typu δ (por. [6], s. 47), ciąg $t_{(n)m}(x; y)$ jest zbieżny dystrybucyjnie do $\delta(x-y)$, tzn. dla każdej funkcji $\varphi(x) \in C_0^\infty$ [6] mamy

$$(4) \qquad \lim_{m\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t_{(n)m}(x; y)\varphi(x)dx = \varphi(y) = \big(\delta(x-y), \varphi(x)\big).$$

Co więcej — ze względu na określenie ciągu $t_{(n)m}(x; y)$ — wystarczy, aby w związku (4) funkcje $\varphi(x) \in C^\infty$.

Stąd

$$(5) \qquad 2x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \delta(x-y),$$

przy czym związek (5) należy rozumieć w sensie równości (4). Tutaj $x, y \in \langle 0,1\rangle$; $\delta(x-y)$ — dystrybucja δ-Diraca o przesuniętym argumencie.

Analogicznie można pokazać, że

$$(5') \qquad 2y \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \delta(y-x),$$

gdzie $x, y \in \langle 0,1\rangle$.

Pomnożymy teraz funkcje $t_{(n)m}(x; y)$ przez $I_n(ax)$, (gdzie $I_n(z)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela n-tego rzędu [2], zaś a — dowolna stała rzeczywista) oraz scałkujmy ten iloczyn od zera do x, gdzie $x > y$. Wykorzystując (2) oraz związek $J_n(iz) = i^n I_n(z)$ $(i = \sqrt{-1})$ można wynik tego całkowania zapisać w postaci równania różniczkowego

$$(6) \qquad S_{n,m}(x, y) - \frac{I_n(ax)}{aI_n'(ax)} \frac{\partial}{\partial x} S_{n,m}(x, y) = \int\limits_0^x \frac{I_n(a\xi)t_{(n)m}(\xi; y)}{2axI_n'(ax)} d\xi,$$

gdzie

$$S_{n,m}(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{J_n(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2+a^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})}.$$

Jak łatwo sprawdzić, ciąg $\{S_{n,m}(x, y)\}_{m=1,2,\ldots}$ jest zbieżny niemal jednostajnie dla $x, y \in \langle 0,1\rangle$. Wykonując w równaniu (6) przejście z m do ∞ otrzymujemy stąd — wobec związku (4) — równanie różniczkowe

$$S_n(x, y) - \frac{I_n(ax)}{aI_n'(ax)} \frac{\partial}{\partial x} S_n(x, y) = \frac{I_n(ay)}{2axI_n'(ax)}. \tag{7}$$

Tutaj

$$S_n(x, y) = \lim_{m\to\infty} S_{n,m}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2+a^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})}. \tag{8}$$

Rozwiązaniem równania (7) jest funkcja

$$S_n(x, y) = A_n I_n(ax) + \frac{1}{2} I_n(ay) K_n(ax), \qquad x \neq 0, \tag{9}$$

gdzie A_n — stała, którą wyznacza się z warunku

(10) $S_n(1, y) = 0$, wynikającego z (8);

zaś $K_n(ax)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela II rodzaju n-tego rzędu.

Biorąc pod uwagę fakt, że funkcja $S_n(x, y)$ jest symetryczna względem obu zmiennych, oraz uwzględniając (9) i (10) otrzymuje się sumę szeregu (8):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2+a^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = 2a^2\{\eta(x-y)F_{n1}(a, x)I_n(ay) + \eta(y-x)F_{n1}(a, y)I_n(ax)\}, \tag{11}$$

gdzie $\eta(z)$ jest funkcją Heaviside'a, oraz

$$F_{n1}(p, z) = \frac{1}{4p^2I_n(p)}[K_n(pz)I_n(p) - K_n(p)I_n(pz)]; \quad x, y \in (0,1\rangle.$$

W dalszych związkach używać się jeszcze będzie następującego oznaczenia skracającego:

$$F_{n2}(p, z) = \frac{1}{4p^2I_n(p)}[K_n(p)I_{n+1}(pz) + K_{n+1}(pz)I_n(p)].$$

Nietrudno zauważyć, że

$$F_{n1}(p, 1) = 0,$$

$$F_{n2}(p, 1) = \frac{1}{4p^3I_n(p)}.$$

Związek (11) jest podstawą wszystkich następnych wyprowadzonych zależności. Dla $n = 0$ związek (11) sprowadza się do postaci wyprowadzonej w pracy [3].

2. Inne szeregi typu (1)

Przy wszystkich następnych przekształceniach będziemy uważać, że $x \neq y$ oraz $x, y \in (0,1\rangle$. W związku z tym przeprowadzone różniczkowania dotyczyć będą funkcji ciągłych lub szeregów zbieżnych jednostajnie i bezwzględnie (określonych dla $x < y$ oraz $y < x$, przy czym $x, y \in (0, 1\rangle$) i rozumiane będą w zwykłym sensie.

Zróżniczkowanie związku (11) względem zmiennej x prowadzi do następującej zależności:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni} x) J_n(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = 2a^3 \{\eta(x-y) I_n(ay) F_{n2}(a, x) - \\ - \eta(y-x) I_{n+1}(ax) F_{n1}(a, y)\}. \tag{12}$$

Jeśli w (12) położyć $x = 1$, to otrzymuje się związek

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni} J_n(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{I_n(ay)}{2I_n(a)}, \qquad y \in (0,1). \tag{13}$$

Jeśli w (12) dokonać przejścia granicznego z a do zera, to otrzymuje się wzór

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} x) J_n(\mu_{ni} y)}{\mu_{ni} J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \frac{1}{2x} \left(\frac{y}{x}\right)^n \eta(x-y). \tag{14}$$

Przejście z x do 1 we wzorze (14), lub przejście z a do zera we wzorze (13), daje znany rezultat [por. 1]:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni} y)}{\mu_{ni} J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{y^n}{2}, \qquad y \in \langle 0, 1). \tag{15}$$

Mnożąc związek (12) obustronnie przez $-a^{-2}$, związek (14) przez a^{-2} i dodając je stronami otrzymuje się:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} x) J_n(\mu_{ni} y)}{\mu_{ni}(\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \eta(x-y) \left\{\frac{1}{2a^2 x} \left(\frac{y}{x}\right)^n - 2a I_n(ay) F_{n2}(a, x)\right\} + \\ + \eta(y-x) 2a I_{n+1}(ax) F_{n1}(a, y). \tag{16}$$

Podstawiając w (16) $x = 1$, otrzymuje się wzór:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni} y)}{\mu_{ni}(\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2a^2} \left[y^n - \frac{I_n(ay)}{I_n(a)}\right], \qquad y \in (0,1). \tag{17}$$

Związek (17) można również łatwo wyprowadzić na innej drodze, rozkładając na ułamki proste [7, 8] funkcję $f(a) = I_n(ay)/aI_n(a)$.

Zróżniczkowanie związku (16) po y pozwala uzyskać zależność ($y \neq x$):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} x) J_{n+1}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}(\mu_{ni})} = 2a^2 \{\eta(x-y) I_{n+1}(ay) F_{n2}(a, x) + \\ + \eta(y-x) I_{n+1}(ax) F_{n2}(a, y)\}. \tag{18}$$

Jeśli w (18) położyć $x = 1$, to otrzymuje się związek

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2) J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{I_{n+1}(ay)}{2aI_n(a)}, \qquad y \in (0,1\rangle. \tag{19}$$

Przejście w (19) z a do zera daje w wyniku [por. 1]:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} y)}{\mu_{ni}^2 J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{y^{n+1}}{4(n+1)}, \quad y \in (0,1\rangle, \tag{20}$$

zaś przyjmując w (19) $y = 1$, otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{ni}^2 + a^2} = \frac{I_{n+1}(a)}{2aI_n(a)}. \tag{21}$$

Przechodząc z a do zera w (21) bądź z y do jedności w (20) dostaje się znany związek

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{ni}^2} = \frac{1}{4(n+1)}. \tag{22}$$

Rozważmy jeszcze szereg postaci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+k}(\mu_{ni} x) J_{n+k}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})}$$

gdzie $k = 0,1$, $a \neq b$, b — nowa dowolna stała. Szereg ten można zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+k}(\mu_{ni} x) J_{n+k}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \tag{23}$$

$$= \frac{1}{b^2 - a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\mu_{ni}^2 + a^2} - \frac{1}{\mu_{ni}^2 + b^2} \right] \frac{J_{n+k}(\mu_{ni} x) J_{n+k}(\mu_{ni} y)}{J_{n+1}^2(\mu_{ni})}.$$

Biorąc pod uwagę (23), (18) i (11) łatwo jest uzyskać sumy następujących szeregów:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni} x) J_n(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \frac{2}{b^2 - a^2} \{ \eta(x-y) [a^2 I_n(ay) F_{n1}(a, x) - \tag{24}$$

$$- b^2 I_n(by) F_{n1}(b, x)] + \eta(y-x) [a^2 I_n(ax) F_{n1}(a, y) - b^2 I_n(bx) F_{n1}(b, y)] \}.$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} x) J_{n+1}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \frac{2}{b^2 - a^2} \{ \eta(x-y) [a^2 I_{n+1}(ay) F_{n2}(a, x) - \tag{25}$$

$$- b^2 I_{n+1}(by) F_{n2}(b, x)] + \eta(y-x) [a^2 I_{n+1}(ax) F_{n2}(a, y) - b^2 I_{n+1}(bx) F_{n2}(b, y)] \}.$$

Przyjmując w (25) $x = 1$ otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 + a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2) J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2(b^2 - a^2)} \left[\frac{I_{n+1}(ay)}{aI_n(a)} - \frac{I_{n+1}(by)}{bI_n(b)} \right], \quad y \in (0,1\rangle. \tag{26}$$

Do wyprowadzenia dalszych zależności potrzebne są wzory [2]:

$$K_n(ip) = -\frac{\pi}{2} i^{-n}\{Y_n(p)+iJ_n(p)\},$$

$$I_n(ip) = i^n J_n(p),$$

gdzie $Y_n(p)$ — funkcja Bessela II rodzaju n-tego rzędu. Korzystając z tych związków otrzymujemy

$$F_{n1}(ip, z) = -i^n G_{n1}(p, z),$$

$$F_{n2}(ip, z) = i^{-n+1} G_{n2}(p, z),$$

gdzie

$$G_{n1}(p, z) = \frac{\pi}{8p^2 J_n(p)}[Y_n(p)J_n(pz) - Y(pz)J_n(p)],$$

$$G_{n2}(p, z) = \frac{\pi}{8p^2 J_n(p)}[Y_n(p)J_{n+1}(pz) - Y_{n+1}(pz)J_n(p)].$$

Korzystając z powyższych wzorów i związków (11)—(13), (16)—(19), (24)—(26) można — zastępując w nich stałe a i b stałymi urojonymi ia oraz ib — uzyskać następujące zależności:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = 2a^2\{\eta(x-y)G_{n1}(a, x)J_n(ay) + \eta(y-x)G_{n1}(a, y)J_n(ax)\}, \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}J_{n+1}(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = 2a^3\{\eta(x-y)J_n(ay)G_{n2}(a, x) + \eta(y-x)J_{n+1}(ax)G_{n1}(a, y)\}, \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{J_n(ay)}{2J_n(a)}, \quad y \in (0,1), \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}x)J_n(\mu_{ni}y)}{\mu_{ni}(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \eta(x-y)\left\{2aJ_n(ay)G_{n2}(a, x) - \frac{1}{2a^2x}\left(\frac{y}{x}\right)^n\right\} + \eta(y-x)2aJ_{n+1}(ax)G_{n1}(a, y), \tag{30}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni}y)}{\mu_{ni}(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{J_n(ay)}{J_n(a)} - y^n\right], \quad y \in (0,1), \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}x)J_{n+1}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = 2a^2\{\eta(x-y)J_{n+1}(ay)G_{n2}(a, x) + \eta(y-x)J_{n+1}(ax)G_{n2}(a, y)\}, \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2) J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{J_{n+1}(ay)}{2aJ_n(a)} \quad y \in (0,1\rangle, \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{ni}^2 - a^2} = \frac{J_{n+1}(a)}{2aJ_n(a)}, \tag{34}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni} x) J_n(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \tag{35}$$

$$= \frac{2}{a^2+b^2} \{\eta(x-y)[a^2 J_n(ay) G_{n1}(a, x) - b^2 I_n(by) F_{n1}(b, x)] +$$

$$+ \eta(y-x)[a^2 J_n(ax) G_{n1}(a, y) - b^2 I_n(bx) F_{n1}(b, y)]\},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} x) J_{n+1}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2) J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \tag{36}$$

$$= \frac{2}{a^2+b^2} \{\eta(x-y)[a^2 J_{n+1}(ay) G_{n2}(a, x) - b^2 I_{n+1}(by) F_{n2}(b, x)] +$$

$$+ \eta(y-x)[a^2 J_{n+1}(ax) G_{n2}(a, y) - b^2 I_{n+1}(bx) F_{n2}(b, y)]\},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^2 - a^2)(\mu_{ni}^2 + b^2) J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2(a^2+b^2)} \left[\frac{J_{n+1}(ay)}{aJ_n(a)} - \frac{I_{n+1}(by)}{bI_n(b)} \right]. \tag{37}$$

Kontynuując procedurę wyznaczania sum szeregów Fouriera-Bessela, wskazaną przez WOELKEGO [3], można by napisać jeszcze cały szereg interesujących zależności. Poprzestaniemy jednakże na pokazanych wyżej związkach. Należy stwierdzić, że wszystkie wyprowadzone wzory można dla $n = 0$ znaleźć w pracy [3].

3. Szeregi, których sumy wyrażają się przez funkcje Thomsona (Kelvina)

Zastępując w związkach (11)—(37) stałe a i b przez stałe zespolone $\sqrt{i}\,a$ oraz $\sqrt{i}\,b$ otrzymuje się szeregi, których sumy wyrażają się przez kombinacje funkcji Thomsona [2]. W szczególności można poprzez te funkcje wyrazić sumy szeregów, zawierających w mianownikach swoich składników wyrażenia $\mu_{ni}^4 + a^4$.

I tak podstawiając wielkość $\sqrt{i}\,a$ zamiast a oraz b do związku (35) otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_n(\mu_{ni} x) J_n(\mu_{ni} y)}{(\mu_{ni}^4 + a^4) J_{n+1}^2(\mu_{ni})} = \tag{38}$$

$$= \frac{M_n(ax) M_n(ay)}{2a^2} \left\{ [\eta(x-y) + \eta(y-x)] \frac{N_n(a)}{M_n(a)} \sin[\theta_n(ax) + \theta_n(ay) + \phi_n(a) - \theta_n(a)] - \right.$$

$$- \left[\eta(x-y) \frac{N_n(ax)}{M_n(ax)} \sin[\theta_n(ay) + \phi_n(ax)] + \right.$$

$$\left.\left. + \eta(y-x) \frac{N_n(ay)}{M_n(ay)} \sin[\theta_n(ax) + \phi_n(ay)] \right] \right\}.$$

Wykonując takie samo podstawienie we wzorze (36) dostajemy

$$(39)\quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_{n+1}(\mu_{ni}x)J_{n+1}(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^4+a^4)J_{n+1}^2(\mu_{ni})} =$$

$$= \frac{M_{n+1}(ax)M_{n+1}(ay)}{2a^2}\Bigg\{[\eta(x-y)+\eta(y-x)]\frac{N_n(a)}{M_n(a)}\sin[\theta_{n+1}(ax)+$$

$$+\theta_{n+1}(ay)+\phi_n(a)-\theta_n(a)]-\Bigg[\eta(x-y)\frac{N_{n+1}(ax)}{M_{n+1}(ax)}\sin[\theta_{n+1}(ay)+$$

$$+\phi_{n+1}(ax)]+\eta(y-x)\frac{N_{n+1}(ay)}{M_{n+1}(ay)}\sin[\theta_{n+1}(ax)+\phi_{n+1}(ay)]\Bigg]\Bigg\}.$$

Podobnie — podstawiając w związkach (17) i (30) wielkość $\sqrt{i}\,a$ w miejsce a, następnie zaś dodając lub odejmując stronami otrzymane wyniki — uzyskujemy wzory

$$(40)\quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{ni}J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^4+a^4)J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2a^2}\frac{M_n(ay)}{M_n(a)}\sin[\theta_n(a)-\theta_n(ay)],$$

$$(41)\quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^2J_n(\mu_{ni}y)}{(\mu_{ni}^4+a^4)\mu_{ni}J_{n+1}(\mu_{ni})} = \frac{1}{2a^2}\left\{y^n-\frac{M_n(ay)}{M_n(a)}\cos[\theta_n(a)-\theta_n(ay)]\right\}.$$

Tutaj

$$M_n(z) = \sqrt{\mathrm{ber}_n^2 z+\mathrm{bei}_n^2 z},$$

$$N_n(z) = \sqrt{\mathrm{ker}_n^2 z+\mathrm{kei}_n^2 z},$$

$$\theta_n(z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{bei}_n z}{\mathrm{ber}_n z}\right),$$

$$\phi_n(z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{kei}_n z}{\mathrm{ker}_n z}\right),$$

$\mathrm{ber}_n z$, $\mathrm{bei}_n z$, $\mathrm{ker}_n z$, $\mathrm{kei}_n z$ — funkcje Kelvina n-tego rzędu. Są one powiązane ze zmodyfikowanymi funkcjami Bessela związkami [9]:

$$I_n(zi^{1/2}) = (-i)^n[\mathrm{ber}_n z+i\,\mathrm{bei}_n z] = (-i)^nM_n(z)e^{i\theta_n(z)},$$

$$K_n(zi^{1/2}) = i^n[\mathrm{ker}_n z+i\,\mathrm{kei}_n z] = i^nN_n(z)e^{i\phi_n(z)}.$$

4. Uwagi końcowe

Przedstawione w niniejszej pracy wzory sumacyjne dla szeregów Fouriera-Bessela, zależnych od dwóch zmiennych, są uogólnieniem wyników pracy [3]. Wzory te, sprowadzające się w szczególnych przypadkach do znanych w literaturze związków, wyprowadzono na gruncie teorii dystrybucji.

Otrzymane w tej pracy wyniki mogą znaleźć zastosowanie przy rozwiązywaniu m.in. problemów teorii sprężystości czy termosprężystości.

Jako przykład zastosowania niektórych z wyprowadzonych zależności w teorii termosprężystości rozważmy związek $(1—25)_{RR}$, przedstawiony na s. 12 w pracy [10], opisujący *bezwładność termiczną* pola temperatury w nieosiowosymetrycznie grzanym, obracającym się walcu:

$$\theta^B(\varrho, \varphi, t) = -2\sum_{i=1}^{\infty}\left\{t_{na}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\delta_{ni}\sin[n(\varphi-\omega t)+\delta_{ni}]\frac{J_n(\varrho\mu_{ni})}{\mu_{ni}J_{n+1}(\mu_{ni})}\right\},$$

gdzie

$$\sin\delta_{ni} = \frac{n\omega a^2}{\sqrt{\varkappa^2\mu_{ni}^4+n^2\omega^2a^4}}, \quad \cos\delta_{ni} = \frac{\varkappa\mu_{ni}^2}{\sqrt{\varkappa^2\mu_{ni}^4+n^2\omega^2a^4}},$$

$$\varrho \in (0,1), \quad \varphi \in \langle 0,2\pi), \quad t > T_0,$$

t_{na}, ω, $\varkappa$, a, T_0 — stałe.

Korzystając ze wzorów (40) i (41) po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$\theta^B(\varrho, \varphi, t) = -\sum_{i=1}^{\infty} t_{na}\varrho^n\cos n(\varphi-\omega t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty} t_{na}\frac{M_n\left(\varrho a\sqrt{\frac{\omega n}{\varkappa}}\right)}{M_n\left(a\sqrt{\frac{\omega n}{\varkappa}}\right)}\cos\left[n(\varphi-\omega t)+\theta_n\left(a\sqrt{\frac{\omega n}{\varkappa}}\right)-\theta_n\left(a\varrho\sqrt{\frac{\omega n}{\varkappa}}\right)\right].$$

W podobny sposób przekształcić można pozostałe wzory, opisujące w cytowanej pracy temperaturę, naprężenia, przemieszczenia, etc.

Literatura cytowana w tekście

1. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Wien, Springer-Verlag 1958, tłum. ros. Moskwa 1963.
2. G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge at the University Press, 1962.
3. S. WOELKE, *Summation of certain Bessel series occurring in elasticity problems*, AMS, 3, 22 (1970).
4. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, McGraw-Hill Book Company Inc., 1951.
5. A. GRAY, G. B. METTHEWS, T. M. MAC ROBERT, *Bessel Functions*, Macmillan, London 1922.
6. Z. SZMYDT, *Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe*, PWN, Warszawa 1972.
7. F. LEJA, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1964.
8. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
9. N. W. MCLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
10. K. GRYSA, *Rozkład temperatury i naprężeń w walcu kołowym, wywołany ruchomym niesymetrycznym ogrzewaniem pobocznicy*, Rozprawa doktorska, Poznań, XI, 1975.

Р е з ю м е

О СУММИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

В работе определены суммы нескольких рядов Фурье-Бесселя, зависящих от двух переменных. Решения получены путем анализа $\delta(x)$-образных последовательностей $\{t_{(n)m}(x, y)\}_{m=1,2,...}$ и использования свойств интеграла Ломмела. В частном случае, для рядов, зависящих от одной переменной, получены известные в литературе формулы.

Summary

SUMMATION OF CERTAIN FOURIER-BESSEL SERIES

In this paper the sums of Fourier-Bessel series, which are functions of two variables, are derived. The sequences $\{f_{(n)m}(x; y)\}_{m=1,2,...}$ converging distributionally to $\delta(x)$ and properties of Lommel's integral are the points of departure. In particular cases sums of the series considered have a form well known from the literature.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 lipca 1976 r.