

O PEWNEJ NOWEJ METODZIE ANALIZY STATECZNOŚCI ROZWIĄZAŃ UKŁADÓW  
NIELINIOWYCH O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

ALICJA PIENIĄŻEK, WIESŁAW PIENIĄŻEK (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy [1] została przedstawiona pewna nowa metoda analizy stateczności nieliniowych układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi drugiego rzędu. Autorzy oparli się na następującym rozumowaniu: każdy układ dynamiczny można uważać jako pewne pole dynamiczne, które działa z pewną siłą na znajdujący się w nim punkt materialny. Stateczność tego pola dynamicznego zależy od tego, czy energia zgromadzona przez punkt materialny rośnie czy też maleje pod wpływem sił pola.

Rozumowanie to doprowadziło do opracowania pewnego, wygodnego w stosowaniu, algorytmu, na podstawie którego można wnioskować o stateczności układu. Algorytm ten umożliwia także badanie stateczności cykli granicznych.

W niniejszej pracy zostanie przedstawiona idea metody, zgodnie z [1], jej porównanie z innymi, istniejącymi metodami, oraz jej zastosowanie do badania stateczności równania typu Rayleigha z nieliniową charakterystyką sprężystości.

2. Opis metody [1] i jej sens fizyczny

Niech układ dynamiczny będzie opisany równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego w postaci

$$(2.1) \quad \ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

lub równoważnym mu układem równań pierwszego rzędu

$$(2.2) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y),$$

gdzie  $f(x, y)$  jest funkcją nieparzystą, ze względu na  $x$ , w ogólnym przypadku nieliniową.

Jeżeli układ ten będziemy uważali za pewne pole dynamiczne, to wówczas siła tego pola wyniesie

$$(2.3) \quad F = m\ddot{x} = m\dot{y} = mf(x, y),$$

gdzie  $m$  jest masą punktu materialnego znajdującego się w polu. Wobec tego, równanie (2.1) można zapisać w postaci

$$(2.4) \quad m\ddot{x} = mf(x, y).$$

Przekształcimy powyższe równanie w ten sposób, że dodamy i odejmiemy wyrażenie  $mx$  (o wymiarze siły) do prawej strony. Wyrażenie to zinterpretujemy jako siłę zachowawczą. Otrzymujemy

$$(2.5) \quad m\ddot{x} = mf(x, \dot{x}) + mx - mx.$$

Jeżeli w powyższym równaniu wprowadzimy oznaczenie

$$(2.6) \quad F_1 = mf(x, \dot{x}) + mx,$$

to wówczas ruch punktu materialnego będzie się odbywał pod wpływem siły zachowawczej i siły  $F_1$ , co można ująć zależnością

$$(2.7) \quad m\ddot{x} = F_1 - mx.$$

Jeśli obliczymy pracę siły  $F_1$  podczas jednego, pełnego okresu ruchu  $T$ , to w przypadku gdy jest ona dodatnia punkt materialny znajdujący się w polu dynamicznym powiększa swoją energię, co oznacza, że układ (pole) jest niestateczny. W przeciwnym przypadku, układ posiada cechy stateczności (gdy praca siły  $F_1$  jest ujemna, to wówczas układ wydaje pracę i energia punktu materialnego maleje). Zrównoważmy siłę  $F_1$  siłą  $F_0$  równą co do wartości, lecz przeciwnie skierowaną, tak aby punkt materialny wykonywał ostatecznie ruch zachowawczy opisany równaniem

$$(2.8) \quad \ddot{x} = -x$$

lub równoważnym mu układem równań pierwszego rzędu

$$(2.8a) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$$

Znak pracy wykonywanej przez siłę  $F_0$  będzie przeciwny do znaku pracy siły  $F_1$ , a więc gdy praca  $L_{F_0}$  siły  $F_0$  będzie ujemna, to układ będzie niestateczny, zaś w przeciwnym przypadku układ będzie stateczny.

Obliczymy obecnie pracę siły  $F_0$  w jednym, pełnym okresie ruchu  $T$ . Otrzymujemy

$$(2.9) \quad L_{F_0} = \int_0^T F_0 x dt.$$

Ponieważ jest

$$(2.10) \quad F_0 = -F_1 = -m[f(x, \dot{x}) + x],$$

to praca ta wyniesie

$$(2.9a) \quad L_{F_0} = -m \int_0^T [f(x, \dot{x}) + x] \dot{x} dt.$$

Uwzględniając (2.2) otrzymamy

$$(2.9b) \quad L_{F_0} = -m \int_0^T (\dot{x}X + y\dot{y}) dt.$$

Jak powiedzieliśmy wcześniej, ruch będzie odbywał się po okręgu

$$(2.11) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \Theta, \\ y &= r \sin \Theta, \end{aligned} \quad r = \text{const} > 0.$$

Różniczkując którekolwiek z równań (2.11) względem czasu i wykorzystując odpowiednio zależność (2.8a) otrzymujemy

$$(2.12) \quad \frac{d\Theta}{dt} = -1, \quad d\Theta = -dt.$$

Wprowadzimy obecnie, zgodnie z [1], funkcję

$$(2.13) \quad S'(x, y) = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy + yf(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Jak widać, jest to składowa radialna prędkości fazowej:  $v_r = \dot{r}$ .

Zauważmy teraz, że wyrażenie podcałkowe w (2.9b) można zapisać, wykorzystując (2.13),

$$(2.14) \quad \dot{x}x + y\dot{y} = \sqrt{x^2 + y^2} S'(x, y).$$

Biorąc pod uwagę (2.14), a także (2.11) i (2.12), po zmianie granic całkowania wzór (2.9b) przyjmie postać

$$(2.15) \quad L_{F_0} = -mr \int_0^{2\pi} S(r, \Theta) d\Theta, \quad m > 0, r > 0.$$

Wprowadzimy obecnie funkcję

$$(2.16) \quad g(r) = \int_0^{2\pi} S(r, \Theta) d\Theta.$$

Wobec tego, praca  $L_{F_0}$  posiada znak przeciwny do znaku wyrażenia (2.16), które łatwo obliczymy znając funkcję  $S(r, \Theta)$ .

Funkcję  $g(r)$  wykorzystamy zatem do określania charakteru stateczności układu (2.1); mianowicie:

- jeżeli  $g(r) = 0, \forall r > 0$  to układ jest zachowawczy,
- (2.17) — jeżeli  $g(r) > 0, \forall r > 0$  ( $L_{F_0} < 0$ ), to układ jest niestateczny,
- jeżeli  $g(r) < 0, \forall r > 0$  ( $L_{F_0} > 0$ ), to układ jest stateczny.

Przy pomocy tej metody można badać stateczność cykli granicznych. Posługujemy się tutaj także funkcją  $g(r)$ .

Dla statecznego cyklu granicznego mamy:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} g(r) &> 0 \text{ dla } 0 < r < r_0, \\ g(r_0) &= 0, \\ g(r) &< 0 \text{ dla } r > r_0. \end{aligned}$$

Dla niestatecznego cyklu granicznego jest:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} g(r) &< 0 \text{ dla } 0 < r < r_0 \\ g(r_0) &= 0, \\ g(r) &> 0 \text{ dla } r > r_0. \end{aligned}$$

Wprowadzimy jeszcze funkcję:  $R'(x, y)$  określoną wzorem

$$(2.20) \quad R'(x, y) = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xf(x, y) - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Jest to składowa transwersalna  $v_\theta = r\dot{\theta}$  prędkości fazowej. W dalszych rozważaniach będziemy stosować funkcje  $R'(x, y)$ ,  $S'(x, y)$  lub  $R(r, \theta)$ ,  $S(r, \theta)$  otrzymane po podstawieniu w (2.13) i (2.20):  $x = r\cos\theta$ ,  $y = r\sin\theta$ .

O stateczności układu można sądzić na podstawie analizy funkcji  $S(r, \theta)$  i  $R(r, \theta)$ . Mianowicie, zgodnie z [1], jeżeli w punktach, gdzie  $R(r, \theta) = 0$  funkcja  $S(r, \theta) < 0$ , to wówczas układ jest stateczny. Gdy w punktach, w których  $R(r, \theta) = 0$  funkcja  $S(r, \theta) > 0$ , to układ jest niestateczny. Interpretację fizyczną powyższych warunków można podać opierając się na pracy [2]. Podano w niej metodę dwóch funkcji, pozwalającą na ocenę stateczności układu na podstawie przebiegu trajektorii fazowych, które można przewidzieć na podstawie wykresów tych funkcji na płaszczyźnie fazowej.

W pracy [2] układ (2.2) zinterpretowano jako układ określający prędkość punktu materialnego na płaszczyźnie fazowej. Wspomniane dwie funkcje są określone wzorami<sup>1)</sup>

$$(2.21) \quad \Phi(x, y) = xy + yf(x, y),$$

$$(2.22) \quad \Psi(x, y) = xf(x, y) - y^2.$$

Przedstawiają one odpowiednio: iloczyn skalarny i współrzędną iloczynu wektorowego odległości  $\mathbf{r}(x, y)$  punktu na trajektorii fazowej od początku układu współrzędnych i wektora prędkości fazowej  $\mathbf{v}(x, y)$  tego punktu. Jak łatwo stwierdzić, licznik (2.13) jest to funkcja  $\Phi(x, y)$ , zaś licznik (2.20) jest to funkcja  $\Psi(x, y)$ . Znając wykresy tych funkcji na płaszczyźnie fazowej możemy sądzić o przebiegu trajektorii fazowych układu (2.2). W cytowanej pracy znajduje się szereg przykładów takiej analizy dla różnych typów układów.

Porównajmy analizę stateczności na podstawie metody dwóch funkcji w [2] z analizą na podstawie funkcji  $R'(x, y)$  i  $S'(x, y)$  w nowej metodzie.

Warunek  $R'(x, y) = 0$  oznacza to samo co  $\Psi(x, y) = 0$ , czyli że wektory  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{v}$  pokrywają się, a ich iloczyn wektorowy  $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0$ . Jeżeli równocześnie przy tym  $S'(x, y) < 0$ , a więc  $\Phi(x, y) < 0$ , to układ jest stateczny. Istotnie, iloczyn skalarny  $\mathbf{r} \times \mathbf{v} < 0$ , a to świadczy o tym, że wektor  $\mathbf{v}$  posiada zwrot przeciwny do wektora  $\mathbf{r}$  i punkt porusza się w kierunku początku układu współrzędnych. Przeciwny znak  $S'(x, y)$ , przy równoczesnym  $R'(x, y) = 0$ , wskazuje na zgodne zwroty  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{v}$  i punkt oddala się wówczas od początku układu współrzędnych, a to świadczy o niestateczności układu dynamicznego.

Dalsze porównania z innymi metodami podamy później, a obecnie przedstawimy wspomniany algorytm z [1] w jego pełnej, usystematyzowanej postaci.

A.1. Tworzymy funkcje  $S'(x, y)$ ,  $R'(x, y)$

$$S'(x, y) = \frac{xy + yf(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

<sup>1)</sup> W pracy [2] funkcja  $f(x, y)$  ma znak przeciwny, ponieważ układ (2.2) jest zapisany w postaci:  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -f(x, y)$ , co nie ma wpływu na nasze dalsze rozważania.

$$R'(x, y) = \frac{xf(x, y) - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

lub funkcje  $R(r, \theta)$ ,  $S(r, \theta)$ , po podstawieniu w powyższych wzorach  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .

A.2. Badamy powyższe funkcje; jeżeli w punktach, w których:

- a)  $R(r, \theta) = 0$  funkcja  $S(r, \theta) < 0$ , to układ jest stateczny,
- b)  $R(r, \theta) = 0$  funkcja  $S(r, \theta) > 0$ , to układ jest niestateczny.

A.3. Tworzymy funkcję  $g(r)$

$$g(r) = \int_0^{2\pi} S(r, \theta) d\theta, \quad r = \text{const.}$$

A.4. Na podstawie charakterystyki funkcji  $g(r)$  oceniamy stateczność układu. Jeżeli:

- a)  $g(r) < 0 \quad \forall r > 0$  i  $g(r) \rightarrow -\infty$  przy  $r \rightarrow \infty$ , to układ jest stateczny,
- b)  $g(r) = 0 \quad \forall r > 0$ , to układ jest zachowawczy,
- c)  $g(r) > 0 \quad \forall r > 0$ , to układ jest niestateczny.

d) układ posiada stateczny cykl graniczny, jeżeli:

$$\begin{aligned} g(r) > 0 & \text{ dla } 0 < r < r_0, & g(r_0) = 0, \\ g(r) < 0 & \text{ dla } r > r_0; \end{aligned}$$

e) układ posiada niestateczny cykl graniczny, jeżeli:

$$\begin{aligned} g(r) < 0 & \text{ dla } 0 < r < r_0, & g(r_0) = 0, \\ g(r) > 0 & \text{ dla } r > r_0. \end{aligned}$$

Jeżeli funkcja  $R(r, \theta)$  jest ujemna wszędzie, to wówczas punkt A.4 powyższego algorytmu daje pełną odpowiedź o stateczności układu.

Autorzy niniejszej pracy zbadali przydatność przedstawionej metody do określania stateczności układów o różnych typach punktów osobliwych. Jak się okazało, dla układów o siodłowym punkcie osobliwym metoda ta nie daje odpowiedzi o charakterze stateczności. W pozostałych przypadkach metoda daje wyniki zgodne z otrzymanymi przy zastosowaniu innych metod.

Na zakończenie tego rozdziału podamy dalsze porównania i możliwości zastosowania metody.

Napiszmy równanie trajektorii dla układu (2.2). Po wyrugowaniu czasu otrzymujemy

$$(2.23) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}.$$

W metodzie krzywych stykowych Poincaré'go, (patrz np. [3]), bierze się rodzinę okręgów koncentrycznych, ze środkiem w punkcie osobliwym, o równaniu

$$(2.24) \quad x^2 + y^2 = c, \quad c = \text{const} > 0.$$

Po zróżniczkowaniu powyższego równania otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Wobec powyższego, krzywa stykowa jest opisana równaniem

$$(2.25) \quad \frac{f(x, y)}{y} = -\frac{x}{y}$$

lub po przekształceniu

$$(2.26) \quad xy + yf(x, y) = 0.$$

Jak łatwo stwierdzić warunek ten można otrzymać przyrównując funkcję  $S'(x, y)$  do zera.

Utwórzmy jeszcze stosunek [3]

$$(2.27) \quad \frac{r d\Theta}{dr} = \frac{R(r, \Theta)}{S(r, \Theta)} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{const}.$$

Otrzymaliśmy równanie izokliny względem wektora wodzącego. Kąt  $\varphi$  jest kątem, pod jakim krzywa całkowa przecina wektor wodzący. Jest to pewna modyfikacja metody izoklin, stosowana w pewnych przypadkach topologicznej analizy drgań (patrz np. [3]).

### 3. Analiza stateczności rozwiązań równania Rayleigha z nieliniową charakterystyką sprężystości

W pracy [1], przy pomocy opisanej metody, zbadano stateczność rozwiązań równania typu Duffinga i Van der Pola.

Zastosujemy obecnie tę metodę do badania stateczności równania Rayleigha z nieliniową charakterystyką sprężystości.

Rozpatrzmy równanie Rayleigha w postaci:

$$(3.1) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma_0 x^3 = (\alpha_0 - \beta_0 \dot{x}^2) \dot{x},$$

$$\text{gdzie} \quad \alpha_0 > 0, \quad \beta_0 > 0, \quad \gamma_0 > 0.$$

Wprowadzimy transformację czasu i oznaczenia według wzorów:

$$(3.2) \quad \tau = \omega_0 t, \quad \frac{\alpha_0}{\omega_0} = \alpha, \quad \beta_0 \omega_0 = \beta, \quad \frac{\gamma_0}{\omega_0^2} = \gamma.$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności otrzymujemy równanie w postaci bezwymiarowej

$$(3.3) \quad \ddot{x} + x + \gamma x^3 = (\alpha - \beta \dot{x}^2) \dot{x}$$

lub równoważny mu układ równań pierwszego rzędu:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\alpha - \beta y^2)y - x - \gamma x^3, \end{cases}$$

gdzie obecnie kropka oznacza pochodną względem bezwymiarowego czasu  $\tau$ .

Jak można się przekonać, układ ten posiada jeden punkt osobliwy w początku układu współrzędnych. W zależności od pierwiastków równania charakterystycznego jest on węzłem lub ogniskiem niestatecznym. Pierwiastki te, dla naszego układu, mają postać:

$$(3.5) \quad \lambda_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - 4}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - 4}.$$

Jeśli  $\alpha > 2$ , to punkt osobliwy jest węzłem niestatecznym, natomiast dla  $\alpha < 2$ , punkt ten jest ogniskiem niestatecznym.

Zbadajmy teraz, czy dla układu istnieją trajektorie zamknięte i w jakich obszarach mogą występować. Zastosujemy znane kryterium Bendixona. Prawe strony równań układu (3.4) oznaczmy odpowiednio przez  $X$  i  $Y$ . Zbadajmy następnie sumę

$$(3.6) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = \alpha - 3\beta y^2.$$

Zgodnie z kryterium, w obszarze w którym suma ta nie zmienia znaku, nie istnieje cykl graniczny. W naszym przypadku obszar ten jest określony zależnościami:

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}} < y < \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}.$$

Napiszmy teraz równanie trajektorii układu. Po wyrugowaniu czasu z (3.4) otrzymujemy

$$(3.7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha - \beta y^2)y - x - \gamma x^3}{y}.$$

Wyznamy równanie krzywej stykowej. Ponieważ początek układu współrzędnych jest punktem osobliwym, bierzemy rodzinę okręgów koncentrycznych ze środkiem w tym punkcie. Równania okręgów są:

$$(3.8) \quad x^2 + y^2 = c, \quad c = \text{const.}$$

Po zróżniczkowaniu powyższego równania otrzymujemy

$$(3.9) \quad \frac{x}{y} = -\frac{dy}{dx}.$$

Krzywą stykową opisuje równanie

$$(3.10) \quad \frac{(\alpha - \beta y^2)y - x - \gamma x^3}{y} = -\frac{x}{y}$$

lub po przekształceniu

$$(3.11) \quad \beta y^4 - \alpha y^2 + \gamma x^3 y = 0.$$

We współrzędnych biegunowych równanie to można napisać w postaci zależności na  $r$  dla okręgów stykowych

$$(3.12) \quad r^2 = \frac{\alpha \sin \Theta}{\beta \sin^3 \Theta + \gamma \cos^3 \Theta}.$$

Powyższe równanie można także otrzymać przyrównując  $S(r, \theta)$  do zera. Z równania (3.12) można obliczyć  $r_{\min}$  i  $r_{\max}$  okręgów stykowych. Zastosujemy obecnie algorytm przedstawiony w poprzednim rozdziale.

A.1. Funkcje  $S(r, \theta)$  i  $R(r, \theta)$  mają następującą postać:

$$\begin{aligned} S(r, \theta) &= r \sin \theta \cos \theta + \sin \theta [(\alpha - \beta r^2 \sin^2 \theta) r \sin \theta - \gamma r^3 \cos^3 \theta - r \cos \theta], \\ R(r, \theta) &= \cos \theta [(\alpha - \beta r^2 \sin^2 \theta) r \sin \theta - r \cos \theta - \gamma r^3 \cos^3 \theta] - r \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

A.2. Znajdziemy  $r$  i  $\theta$ , dla których  $R(r, \theta) = 0$  i równocześnie  $S(r, \theta) < 0$ . Z zależności  $R(r, \theta) = 0$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} [(\alpha - \beta r^2 \sin^2 \theta) r \sin \theta - r \cos \theta - \gamma r^3 \cos^3 \theta] &= \frac{r \sin^2 \theta}{\cos \theta}, \\ \cos \theta &\neq 0. \end{aligned}$$

Po podstawieniu powyższego do nierówności  $S(r, \theta) < 0$  otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \theta < 0.$$

co oznacza, że kąt  $\theta$  należy wybierać z przedziałów

$$(3.13) \quad \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi < \theta < n\pi, \quad \text{gdzie} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Z warunku  $R(r, \theta) = 0$  otrzymamy związek na  $r$ , w postaci

$$(3.14) \quad r^2 = \frac{\alpha \sin 2\theta - 2}{2 \cos \theta (\beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta)}$$

przy założeniu, że mianownik powyższego ułamka jest różny od zera.

Aby otrzymać rzeczywiste  $r$ , prawa strona zależności (3.14) musi być dodatnia. Zależność tę rozpatrzmy dla trzech przypadków wartości  $\alpha$ : I)  $\alpha < 2$ , II)  $\alpha > 2$ , III)  $\alpha = 2$ .

**P r z y p a d e k I:**  $0 < \alpha < 2$ . Prawa strona (3.14) jest dodatnia, gdy:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \alpha \sin 2\theta - 2 &< 0, \\ \cos \theta (\beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta) &< 0. \end{aligned}$$

Pierwsza nierówność zachodzi zawsze, druga nierówność, gdy:

$$(3.16) \quad \cos \theta < 0, \quad \beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta > 0$$

lub

$$(3.17) \quad \cos \theta > 0, \quad \beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta < 0.$$

Rozpatrzmy nierówności (3.16). Pierwsza z nich jest spełniona, gdy kąt  $\theta$  należy do przedziałów

$$(3.18) \quad \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi < \theta < \left(2n + \frac{3}{2}\right) \pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

<sup>2)</sup>  $\cos \theta$  nie może być równe zero, ponieważ warunek  $R(r, \theta) = 0$  byłby spełniony tylko dla  $\sin \theta = 0$ , co dla tego samego kąta  $\theta$  nie może równocześnie zachodzić.



Po przekształceniu drugiej nierówności otrzymujemy warunek

$$\operatorname{tg}\theta > -\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}},$$

który jest spełniony dla kątów

$$(3.19) \quad \left[ \operatorname{arc\,tg} \left( -\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}} \right) \right] + n\pi < \theta < \left( \frac{1}{2} + n \right) \pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Rozpatrując podobnie nierówność (3.17) otrzymujemy warunki na  $\theta$  w postaci:

$$(3.20) \quad \left( 2n - \frac{1}{2} \right) \pi < \theta < \left( 2n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$(3.21) \quad \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi < \theta < \left[ \operatorname{arc\,tg} \left( -\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}} \right) \right] + n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Biorąc pod uwagę (3.13), kąt  $\theta$  należy wybierać, dla omawianego przypadku, z części wspólnej przedziałów: (3.13), (3.18) i (3.19) lub (3.13), (3.20), (3.21).

Przypadek II:  $\alpha > 2$ . Należy tutaj rozpatrzeć dwie pary nierówności:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \alpha \sin 2\theta - 2 &> 0, \\ \cos \theta (\beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta) &> 0; \end{aligned}$$

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \alpha \sin 2\theta - 2 &< 0, \\ \cos \theta (\beta \sin^3 \theta + \gamma \cos^3 \theta) &< 0. \end{aligned}$$

Analiza (3.22) wykazała, że nie istnieje wspólny przedział dla kąta  $\theta$ , w którym zachodziłyby wymagane dla stateczności warunki  $R(r, \theta) = 0$  i  $S(r, \theta) < 0$ .

Analiza (3.23) daje w rezultacie następujące przedziały kąta  $\theta$ :

$$(3.24) \quad \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{1} \operatorname{arcsin} \frac{2}{\alpha} \right) + n\pi < \theta < \left( \pi + \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{2}{\alpha} \right) + n\pi, \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

oraz warunki identyczne, jak (3.18), (3.19) i (3.20), (3.21). W przypadku II, kąt  $\theta$ , dla którego jest

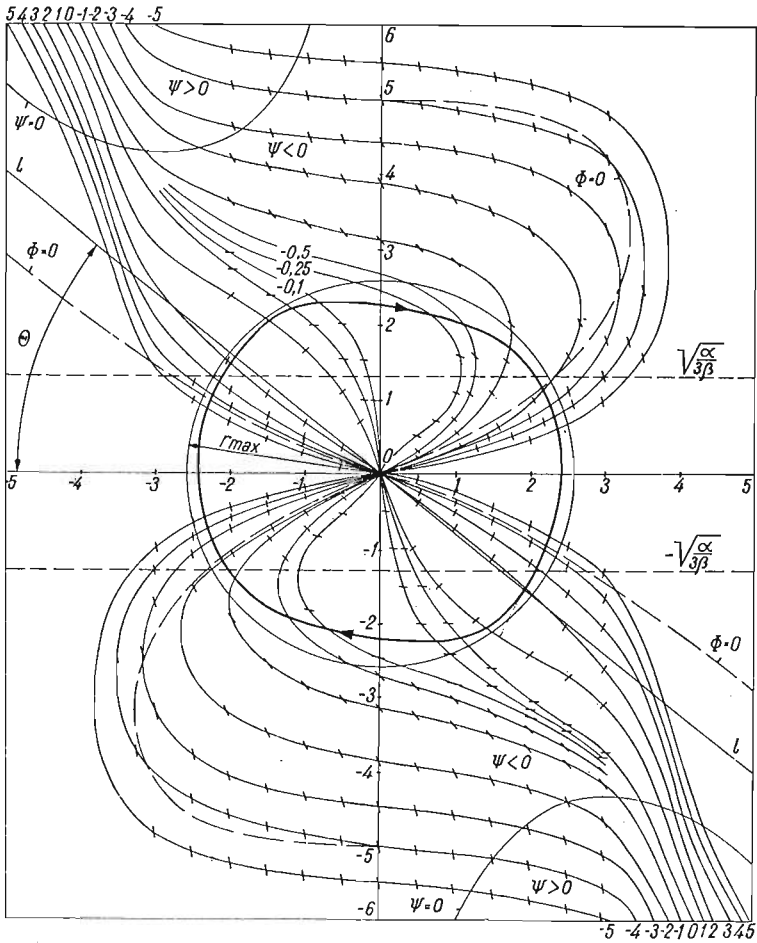
$$R(r, \theta) = 0 \quad \text{i} \quad S(r, \theta) < 0$$

należy ostatecznie wybierać z części wspólnej przedziałów: (3.13), (3.24), (3.18) i (3.19) lub (3.13), (3.24), (3.20) i (3.21).

Dla przypadku III,  $\alpha = 2$  wspólny przedział  $\theta$ , dla którego funkcje  $R(r, \theta)$  i  $S(r, \theta)$  spełniałyby wspomniane warunki, nie istnieje.

A.3. Obliczmy funkcję  $g(r)$ :

$$g(r) = \int_0^{2\pi} S(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (r \sin \theta \cos \theta + r \alpha \sin^2 \theta - \beta r^3 \sin^4 \theta - \gamma r^3 \sin \theta \cos^3 \theta - \\ - r \sin \theta \cos \theta) d\theta,$$



Rys. 1. Cykl graniczny równania Rayleigha z nieliniową charakterystyką sprężystą

$$(3.25) \quad g(r) = -\pi r \left( \frac{3}{4} \beta r^2 - \alpha \right).$$

A.4. Badamy znak funkcji  $g(r)$ .

Dla  $r > 0$  jest:

$$g(r) > 0, \quad \text{gdy} \quad 0 < r < 2 \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}},$$

$$g(r) = 0, \quad \text{gdy} \quad r = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}},$$

$$g(r) < 0, \quad \text{gdy} \quad r > 2 \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}.$$

Skąd wniosek, że dla rozpatrywanego równania istnieje stateczny cykl graniczny.

Jako przykład liczbowy rozpatrzmy równanie Rayleigha z nieliniową charakterystyką sprężystą dla następujących wartości współczynników:

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{5}, \quad \gamma = \frac{1}{10}.$$

Cykl graniczny, dla tego przypadku równania jest przedstawiony na rys. 1. Na rysunku tym znajdują się także krzywe  $\Phi(x, y) = 0$  i  $\Psi(x, y) = 0$ , obszar otrzymany z warunku negatywnego Bendixona, w którym nie istnieją trajektorie zamknięte (ograniczony prostymi równoległymi do osi  $x: y = \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}$ ), oraz prosta ukośna  $l$ , przechodząca przez początek układu współrzędnych ograniczająca z jednej strony obszar kąta  $\Theta$ , otrzymany z części wspólnej przedziałów (3.13), (3.18) i (3.19) po podstawieniu wartości liczbowych. Okrąg o promieniu  $r_{\max}$  był otrzymany z warunku (3.12). Cykl graniczny został wyznaczony przy pomocy metody izoklin. Jak widać z rysunku leży on całkowicie w obszarze, w którym funkcja  $\Psi(x, y) < 0$ , a więc  $R'(x, y) < 0$ . Zauważmy, że ograniczający go okrąg o promieniu  $r_{\max} = 2,58$  leży także w tym obszarze. Jak wspominaliśmy wcześniej, w takim przypadku wystarczyło tylko zbadać znak funkcji  $g(r)$ , co dałoby pełną odpowiedź o stateczności.

Na zakończenie podajemy równania izoklin i krzywych  $\Psi(x, y)$ , oraz  $\Phi(x, y)$ . Są one następujące:

$$(3.26) \quad y^3 - 5(1-c)y + 5x + 0,5x^5 = 0, \quad c = \text{const} > 0,$$

$$(3.27) \quad \Psi(x, y) = -0,2xy^3 - y^2 - xy - 0,1x^4 - x^2,$$

$$(3.28) \quad \Phi(x, y) = -0,2y^4 + y^2 - 0,1x^3y.$$

#### 4. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda zawiera szereg elementów z istniejących już znanych metod, co świadczy o jej słuszności. Podany algorytm jest wygodnym schematem badania stateczności układów. Należy także podkreślić, że podobnie jak bezpośrednia metoda LAPUNOWA, nie wymaga rozwiązywania równań. Trudności mogą wystąpić przy badaniu funkcji  $R(r, \Theta)$  i  $S(r, \Theta)$ , w punkcie A.2 algorytmu, ponieważ może zaistnieć potrzeba rozwiązania układu: równanie–nierówność wysokiego stopnia.

Na podstawie algorytmu można także wyznaczyć krzywe stykowe cykli granicznych.

Nowa jest interpretacja fizyczna: traktowanie układu jako pola dynamicznego oddziaływającego na znajdujący się w nim punkt materialny. Przy pomocy łatwej do obliczenia funkcji  $g(r)$  można stwierdzić, czy energia tego punktu pod wpływem sił pola zwiększa się czy też ulega zmniejszeniu, a więc czy układ posiada cechy niestateczności czy też jest stateczny.

Przedstawiona metoda odnosi się do układów o jednym stopniu swobody, które można opisać układem dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu. Wydaje się, że można ją rozszerzyć przynajmniej na układy, które dają się opisać przy pomocy trzech równań różniczkowych rzędu pierwszego.

## Literatura cytowana w tekście

1. Y. SUZUKI, S. IMAI, *A new method of analysing the stability of nonlinear systems*, Bull. of the Tokyo Inst. of Technol., 113 (1972), 1.
2. Wł. BOGUSZ, *Stateczność układów nieliniowych*, Warszawa 1966.
3. Ch. HAYASHI, *Drgania nieliniowe w układach fizycznych*, Warszawa 1968.

## Резюме

О НЕКОТОРОМ НОВОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В работе сравнивается новый метод исследования устойчивости нелинейных систем, предложенный в работе [1], с некоторыми существующими методами. При этом подчеркнуты общие свойства и новые элементы. Проведено исследование устойчивости уравнения Релея с нелинейной характеристикой упругости с помощью алгоритма, представленного в работе [1]. На рис. 1 показан предельный цикл для этого уравнения. Доказана устойчивость этого цикла.

## Summary

ON A CERTAIN NEW METHOD OF ANALYZING THE STABILITY OF SOLUTIONS FOR  
NONLINEAR SYSTEMS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM

In this paper, a certain method of investigating the stability of nonlinear systems presented in [1] is compared with some existing methods. Common features and new elements of this method are exposed. The algorithm used in the method is applied for investigation of the stability of Rayleigh's equation with nonlinear elasticity characteristics.

The limit cycle for that equation is presented in Fig. 1. Stability of the limit cycle is proved in the present paper.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 sierpnia 1974 r.; w wersji ostatecznej — dnia 12 lutego 1975 r.