MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 13 (1975)

OBROTOWO-SYMETRYCZNE DRGANIA WŁASNE POWŁOKI STOŻKOWEJ Z MATERIAŁU ŚCIŚLIWEGO NIELINIOWO SPRĘŻYSTEGO

FERDYNAND TWARDOSZ, TADEUSZ WEGNER (POZNAŃ)

W pracy poddano analizie drgania własne cienkiej powłoki stożkowej wykonanej z materiału jednorodnego, izotropowego i ściśliwego, dla którego zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami jest nieliniowa, ale odwracalna.

Ograniczając się do analizy małych drgań przyjęto związki geometryczne w postaci liniowej, zakładając przy tym prawdziwość hipotezy Kirchhoffa-Love'a.

1. Podstawowe równania i związki

Równania opisujące swobodne obrotowo-symetryczne drgania podłużne i poprzeczne powłoki stożkowej mają postać [4]

$$\begin{cases} N_1+\dfrac{\partial N_1}{\partial s}s-N_2 = 2\varrho h\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}s, \\ 2\dfrac{\partial M_1}{\partial s}+\dfrac{\partial^2 M_1}{\partial s^2}s-\dfrac{\partial M_2}{\partial s}+N_2\operatorname{tg}\alpha = -2\varrho h\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}s, \end{cases} \tag{1.1}$$

gdzie N_1, N_2, M_1, M_2 oznaczają siły normalne i momenty zginające odniesione do jednostki długości powierzchni środkowej, $u(s, t)$, $w(s, t)$ — składowe przemieszczenia punktów powierzchni środkowej odpowiednio w kierunkach stycznym i normalnym, s — odległość dowolnego punktu powłoki od wierzchołka stożka, α — kąt pomiędzy normalną do powierzchni środkowej i osią powłoki, $2h$ — grubość powłoki, ϱ — gęstość materiału powłoki.

Zgodnie z hipotezą Kirchhoffa-Love'a składowe obrotowo-symetrycznego stanu odkształcenia dla elementu warstewki odległej o z od powierzchni środkowej wyrażają się wzorami

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1+z\varkappa_1,$$
$$\varepsilon_{2z} = \varepsilon_2+z\varkappa_2,$$

gdzie

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{s}(u+w\operatorname{tg}\alpha) \tag{1.2}$$

są składowymi stanu odkształcenia powierzchni środkowej powłoki, a wyrażenia

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s} \tag{1.3}$$

charakteryzują zmianę głównych krzywizn.

Zajmiemy się z kolei określeniem składowych stanu naprężenia. Potencjał sprężystości ciała izotropowego przedstawia wyrażenie [1]:

$$V(\varepsilon_0, \psi_0^2) = \Phi_V(\varepsilon_0) + \Phi_f(\gamma_0^2),$$

gdzie

$$\Phi_V(\varepsilon_0) = 9K \int_0^{\varepsilon_0} \varepsilon_0 \varkappa(\varepsilon_0) d\varepsilon_0$$

jest pracą odkształcenia objętościowego,

$$\Phi_f(\gamma_0^2) = \frac{3}{2} G \int_0^{\gamma_0} \gamma_0 \gamma(\gamma_0^2) d\gamma_0$$

— pracą odkształcenia postaciowego,

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{1z} + \varepsilon_{2z} + \varepsilon_{3z}}{3}$$

— średnim wydłużeniem,

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{1z} - \varepsilon_{2z})^2 + (\varepsilon_{2z} - \varepsilon_{3z})^2 + (\varepsilon_{3z} - \varepsilon_{1z})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{12z}^2 + \gamma_{23z}^2 + \gamma_{31z}^2)}$$

— intensywnością odkształceń stycznych,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

— modułem ściśliwości i modułem odkształcenia postaciowego.
Moduł Younga E i liczby Poissona ν są stałymi materiałowymi wyznaczonymi przy małych odkształceniach.

Załóżmy, że funkcja wydłużenia $\varkappa(\varepsilon_0)$ oraz funkcja odkształcenia postaciowego $\gamma(\gamma_0^2)$ mogą być przedstawione z dostateczną dokładnością w postaci [1]:

$$\varkappa(\varepsilon_0) = 1, \quad \gamma(\gamma_0^2) = 1 - g_2 \gamma_0^2,$$

gdzie stałą g_2 wyznacza się doświadczalnie.

Niech dla jednoosiowego rozciągania-ściskania między naprężeniem σ a podłużnym odkształceniem ε zachodzi związek

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(1 + a_3 \sigma^2)\sigma, \tag{1.4}$$

wtedy zależność między współczynnikiem a_3 a stałą g_2 ma postać

$$g_2 = \frac{9}{2} G^2 \left(1 + \frac{G}{3K}\right) a_3,$$

lub wyrażając moduły K i G za pomocą stałych E i ν otrzymamy

$$g_2 = \frac{E^2 \nu_0^3}{2} a_3, \quad \text{gdzie} \quad \nu_0 = \frac{3}{2(1+\nu)}.$$

Założone powyżej związki bardzo dobrze aproksymują rzeczywiście zachodzące zależności dla wielu ważnych w zastosowaniach technicznych materiałów (np. miedź, aluminium, stopy miedzi i inne). Stosując oznaczenia

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{\nu_0}{2}}\gamma_0, \qquad \theta = 3\varepsilon_0,$$

potencjał sprężystości wymienionych materiałów można wyrazić w postaci

$$V = \frac{1}{2}K\theta^2 + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i,$$

gdzie

$$\sigma_i = E(1 - b\varepsilon_i^2)\varepsilon_i, \qquad b = a_3 E^2 \nu_0^2.$$

Wielkość θ jest względną zmianą objętości, wielkości σ_i, ε_i są odpowiednio intensywnością naprężeń i intensywnością odkształceń.

Założenie cienkościenności powłoki pozwala, tak samo jak w teorii płyt cienkich, traktować elementy powłoki, jako będące w dwuwymiarowym stanie naprężenia, stąd z uogólnionego prawa Hooke'a, przyjmując $\sigma_{3z} = 0$, otrzymamy

$$\varepsilon_{3z} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{1z}+\varepsilon_{2z}) \qquad \theta = \frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{1z}+\varepsilon_{2z}),$$

$$\varepsilon_i^2 = \frac{4}{3}\left[[\nu_1(\varepsilon_{1z}^2+\varepsilon_{2z}^2)+\nu_2\varepsilon_{1z}\varepsilon_{2z}+\frac{1}{4}\nu_0\gamma_{12z}^2\right],$$

gdzie oznaczono

$$\nu_1 = \frac{1}{3}\left[\frac{\nu}{(1-\nu)^2}+1\right]\nu_0, \qquad \nu_2 = \frac{1}{3}\left[\frac{2\nu}{(1-\nu)^2}-1\right]\nu_0.$$

Ponieważ w przypadku drgań obrotowo-symetrycznych podłużnych i poprzecznych $\gamma_{12z} = 0$, to

$$\varepsilon_i^2 = \frac{4}{3}(a_0 + za_1 + z^2 a_2),$$

gdzie

$$a_0 = \nu_1(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)+\nu_2\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

$$a_1 = 2\nu_1(\varepsilon_1\varkappa_1+\varepsilon_2\varkappa_2)+\nu_2(\varepsilon_1\varkappa_2+\varepsilon_2\varkappa_1),$$

$$a_2 = \nu_1(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)+\nu_2\varkappa_1\varkappa_2.$$

Pochodne cząstkowe funkcji $V(\varepsilon_{1z}, \varepsilon_{2z})$ określają składowe stanu naprężenia

$$\sigma_{1z} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{1z}}, \qquad \sigma_{2z} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{2z}},$$

stąd

$$\sigma_{1z} = \frac{4}{3}E[\nu_3\varepsilon_1+\nu_4\varepsilon_2+z(\nu_3\varkappa_1+\nu_4\varkappa_2)]-\frac{16}{9}Eb\Big\{a_0\Big(\nu_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2\Big)+$$
$$+z\Big[a_0\Big(\nu_1\varkappa_1+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_2\Big)+a_1\Big(\nu_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2\Big)\Big]+z^2\Big[a_1\Big(\nu_1\varkappa_1+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_2\Big)+$$
$$+a_2\Big(\nu_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2\Big)\Big]+z^3a_2\Big(\nu_1\varkappa_1+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_2\Big),$$

$$\sigma_{2z} = \frac{4}{3}E[\nu_3\varepsilon_3+\nu_4\varepsilon_1+z(\nu_3\varkappa_2+\nu_4\varkappa_1)]-\frac{16}{9}Eb\Big\{a_0\Big(\nu_1\varepsilon_2+\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1\Big)+$$
$$+z\Big[a_0\Big(\nu_1\varkappa_2+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_1\Big)+a_1\Big(\nu_1\varepsilon_2+\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1\Big)\Big]+z^2\Big[a_1\Big(\nu_1\varkappa_2+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_1\Big)+$$
$$+a_2\Big(\nu_1\varepsilon_2\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1\Big)\Big]+z^3a_2\Big(\nu_1\varkappa_2+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_1\Big)\Big\},$$

natomiast

$$\nu_3 = \nu_1+\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)^2},\qquad \nu_4 = \frac{1}{2}\nu_2+\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)^2}.$$

Dla cienkich powłok siły i momenty działające w przekrojach powłoki na jednostkę długości powierzchni środkowej związane są (w przybliżeniu) z naprężeniami zależnościami

$$N_1 = \int_{-h}^{h}\sigma_{1z}dz,\qquad N_2 = \int_{-h}^{h}\sigma_{2z}dz,$$
$$M_1 = -\int_{-h}^{h}\sigma_{1z}zdz,\qquad M_2 = -\int_{-h}^{h}\sigma_{2z}zdz,$$

stąd po wykonaniu całkowania mamy:

$$N_1 = \bar{B}(\nu_3\varepsilon_1+\nu_4\varepsilon_2)-\bar{B}_1a_0\Big(\nu_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2\Big)-\bar{B}_2\Big[a_1\Big(\nu_1\varkappa_1+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_2\Big)+a_2\Big(\nu_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2\Big)\Big],$$

$$N_2 = \bar{B}(\nu_3\varepsilon_3+\nu_4\varepsilon_1)-\bar{B}_1a_0\Big(\nu_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1\Big)-\bar{B}_2\Big[a_1\Big(\nu_1\varkappa_2+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_1\Big)+a_2\Big(\nu_1\varepsilon_2+\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1\Big)\Big],$$

$$M_1 = -\bar{D}(\nu_3\varkappa_1+\nu_4\varkappa_2)+\bar{B}_2\Big[a_0\Big(\nu_1\varkappa_1+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_2\Big)+a_1\Big(\nu_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2\Big)\Big]+$$
$$+\bar{B}_3a_2\Big(\nu_1\varkappa_1+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_2\Big),$$

$$M_2 = -\bar{D}(\nu_3\varkappa_2+\nu_4\varkappa_1)+\bar{B}_2\Big[a_0\Big(\nu_1\varkappa_2+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_1\Big)+a_1\Big(\nu_1\varepsilon_2+\frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1\Big)\Big]+$$
$$+\bar{B}_3a_2\Big(\nu_1\varkappa_2+\frac{1}{2}\nu_2\varkappa_1\Big),$$

gdzie

$$\bar{B} = \frac{8}{3}Eh, \quad \bar{D} = \frac{8}{9}Eh^3, \quad \bar{B}_1 = \frac{32}{9}Ebh, \quad \bar{B}_2 = \frac{32}{77}Ebh^3, \quad \bar{B}_3 = \frac{32}{45}Ebh^5.$$

Jeżeli podstawimy powyższe zależności do układu równań (1.1), a występujące w nich wielkości $a_0, a_1, a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varkappa_1, \varkappa_2$ wyrazimy przez u i w za pomocą związków (1.5), (1.2) i (1.3), otrzymamy poszukiwane równania obrotowo-symetrycznych drgań powłoki stożkowej w następującej postaci:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\bar{B}\left[\nu_3\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\left(\nu_3\frac{\partial u}{\partial s} + \nu_4\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial w}{\partial s}\right) - \frac{1}{s^2}\nu_3(u+\operatorname{tg}\alpha w)\right] - \bar{B}_1\Bigg\{3\nu_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{s}\left[3\nu_1\nu_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial u}{\partial s}u + \operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial u}{\partial s}w + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\frac{\partial w}{\partial s}\right) + \nu_1(\nu_1+\nu_2)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^3\right] + \\
&\quad + \frac{1}{s^2}\left(\nu_1^2 + \frac{1}{2}\nu_2^2\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}u^2 + 2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}uw + \operatorname{tg}^2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}w^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 u + \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 w + \right. \\
&\quad \left. + 2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial s}u\frac{\partial w}{\partial s} + 2\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s}w\right) + \frac{1}{s^3}\left[\frac{3}{2}\nu_1\nu_2\operatorname{tg}\alpha\left(u^2\frac{\partial w}{\partial s} + 2\operatorname{tg}\alpha u\frac{\partial w}{\partial s}w + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \operatorname{tg}^2\alpha\frac{\partial w}{\partial s}w^2\right) - \left(\nu_1^2 + \frac{1}{2}\nu_2^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}u^2 + 2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial s}uw + \operatorname{tg}^2\alpha\frac{\partial u}{\partial s}w^2\right)\right] - \\
&\quad - \frac{1}{s^4}\nu_1(\nu_1+\nu_2)(u^3 + 3\operatorname{tg}\alpha u^2 w + 3\operatorname{tg}^2\alpha u w^2 + \operatorname{tg}^3\alpha w^3)\Bigg\} - \bar{B}_2\Bigg\{3\nu_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) + \frac{3}{5}\left[\nu_1\nu_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\frac{\partial w}{\partial s} + u\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}w + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2\frac{\partial w}{\partial s}\right) + \nu_1(\nu_1+\nu_2)\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2\right] + \\
&\quad + \frac{1}{s^2}\left(\nu_1^2 + \frac{1}{2}\nu_2^2\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial s} + 2u\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\frac{\partial s}{\partial w} + u\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\frac{\partial w}{\partial s}w + \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2 w + 2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\right) + \frac{1}{s^3}\left[\frac{3}{2}\nu_1\nu_2\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^3 - \right. \\
&\quad \left. - \left(\nu_1^2 + \frac{1}{2}\nu_2^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial s} + 2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial s}w\right)\right] - \\
&\quad - \frac{3}{s^4}\nu_1(\nu_1+\nu_2)\left(u\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 + \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 w\right)\Bigg\} = 2\varrho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
&\bar{B}\operatorname{tg}\alpha\left[\frac{1}{s}\nu_4\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\nu_3(u+\operatorname{tg}\alpha w)\right] + \bar{D}\nu_3\left(\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{2}{s}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3} - \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s^3}\frac{\partial w}{\partial s}\right) - \\
&\quad - \bar{B}_1\operatorname{tg}\alpha\left[\frac{1}{2s}\nu_1\nu_2\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^3 + \frac{1}{s^2}\left(\nu_1^2 + \frac{1}{2}\nu_2^2\right)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 u + \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 w\right) + \right.
\end{aligned}
\right.
\tag{1.6}
$$

$$
(1.6)\ [\text{cd.}]\quad
\begin{aligned}
&\frac{3}{2s^3}\nu_1\nu_2\left(\frac{\partial u}{\partial s}u^2+2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial s}uw+\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\partial u}{\partial s}w^2\right)+\frac{1}{s^4}\nu_1^2(u^3+3\operatorname{tg}\alpha u^2w+3\operatorname{tg}^2\alpha uw^2+\\
&\quad+\operatorname{tg}^3\alpha w^3)\Bigg]-\bar{B}_2\Bigg\{3\nu_1^2\Bigg(2\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+\\
&\quad+\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}\Bigg)+\frac{3}{s}\Bigg[\nu_1\nu_2\Bigg(\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}u\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}w+\\
&\quad+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)^2\frac{\partial w}{\partial s}+2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}u\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}w+2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial s}+\\
&\quad+\frac{\partial u}{\partial s}u\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}w+2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2\Bigg)+\\
&\quad+2\nu_1(\nu_1+\nu_2)\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\right)\Bigg]+\frac{1}{s^2}\left(\nu_1^2+\frac{1}{2}\nu_2^2\right)\Bigg(2\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}u\frac{\partial w}{\partial s}+\\
&\quad+2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\frac{\partial w}{\partial s}w+4\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s}+4\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}u\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+4\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}w+\\
&\quad+4\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2+3\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+4\frac{\partial u}{\partial s}u\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+4\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}w+\\
&\quad+10\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial s}+u^2\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+2\operatorname{tg}\alpha u\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}w+4\operatorname{tg}\alpha u\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\frac{\partial w}{\partial s}+3\operatorname{tg}\alpha u\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2+\\
&\quad+\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}w^2+4\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\frac{\partial w}{\partial s}w+3\operatorname{tg}^2\alpha\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2w+2\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\Bigg)+\\
&\quad+\frac{1}{s^3}\Bigg[(9\nu_1\nu_2-4\nu_1^2-2\nu_2^2)\operatorname{tg}\alpha\left(u\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial s}+\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial s}w\right)+\\
&\quad+\left(\frac{9}{2}\nu_1\nu_2-4\nu_1^2-2\nu_2^2\right)\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2+3\nu_1\nu_2\operatorname{tg}^2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^3-\\
&\quad-\left(\nu_1^2+\frac{1}{2}\nu_2^2\right)\Bigg(4\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}u\frac{\partial w}{\partial s}+4\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial s}w+3\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\frac{\partial w}{\partial s}+6\frac{\partial u}{\partial s}u\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\\
&\quad+6\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}w+2zu^2\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+4\operatorname{tg}\alpha u\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}w+2\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}w^2\Bigg)\Bigg]-\\
&\quad-\frac{1}{s^4}\Bigg[(3\nu_1\nu_2+\nu_1^2-\nu_2^2)\Bigg(2\frac{\partial u}{\partial s}u\frac{\partial w}{\partial s}+2\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s}w+u^2\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+2\operatorname{tg}\alpha u\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}w+\\
&\quad+\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}w^2\Bigg)+3\nu_1(\nu_1+4\nu_2)\operatorname{tg}\alpha\left(u\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2+\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2w\right)\Bigg]+\\
&\quad+\frac{9}{s^5}\nu_1(\nu_1+\nu_2)\left(u^2\frac{\partial w}{\partial s}+2\operatorname{tg}\alpha u\frac{\partial w}{\partial s}w+\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\partial w}{\partial s}w^2\right)\Bigg\}-\bar{B}_3\Bigg\{3\nu_1^2\Bigg(\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2+\\
&\quad+2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\Bigg)+\frac{3}{s}\Bigg[\nu_1\nu_2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial w}{\partial s}+\left(\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}\right)^2\frac{\partial w}{\partial s}\right)+
\end{aligned}
$$

$$\tag{1.6 [cd.]}
\begin{cases}
+2\nu_1(\nu_1+\nu_2)\dfrac{\partial^3 w}{\partial s^3}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2\Bigg]+\dfrac{1}{s^2}\left(\nu_1^2+\dfrac{1}{2}\nu_2^2\right)\left(\dfrac{\partial^4 w}{\partial s^4}\left(\dfrac{\partial w}{\partial s}\right)^2+4\dfrac{\partial^3 w}{\partial s^3}\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}\dfrac{\partial w}{\partial s}+\right.\\
\left.+\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^3\right)-\dfrac{1}{s^3}\left(\nu_1^2+\dfrac{1}{2}\nu_2^2\right)\left(2\dfrac{\partial^3 w}{\partial s^3}\left(\dfrac{\partial w}{\partial s}\right)^2+3\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2\dfrac{\partial w}{\partial s}\right)-\\
-\dfrac{1}{s^4}(3\nu_1\nu_2+\nu_1^2-\nu_2^2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial s}\right)^2+\dfrac{3}{s^5}\nu_1(\nu_1+\nu_2)\left(\dfrac{\partial w}{\partial s}\right)^3\Bigg\}=-2\varrho h\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{cases}$$

2. Przybliżone całkowanie równań ruchu

Układ równań (1.6) scałkujemy w sposób przybliżony metodą Bubnowa-Galerkina. W przypadku powłoki stożkowej z wierzchołkiem ściętym, o swobodnie podpartych krawędziach, zakładamy funkcje u, w w postaci sumy

$$\tag{2.1}
\begin{aligned}
u(s,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m(t) f_m(s),\\
w(s,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) g_m(s),
\end{aligned}$$

gdzie $U_m(t)$, $W_m(t)$ są nieznanymi funkcjami czasu, natomiast $f_m(s)$ i $g_m(s)$ przyjmujemy w postaci

$$\tag{2.2} f_m(s) = \cos m\pi\frac{s-s_1}{l}, \qquad g_m(s) = \sin m\pi\frac{s-s_1}{l}.$$

Funkcje (2.2) spełniają tylko kinematyczne warunki na brzegach powłoki, natomiast warunki statyczne są spełnione w przybliżeniu [3].

Po wykonaniu całkowań i uporządkowaniu oraz wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$\tag{2.3} X = \frac{U_m}{l}, \qquad Z = \frac{W_m}{l}, \qquad \tau = \omega t, \qquad \theta = \frac{\omega}{\omega_0},$$

gdzie ω jest pulsacją podstawową drgań rozważanego układu, $\omega_0^2 = \dfrac{E}{\varrho l^2}$, a θ bezwymiarową częstością drgań, otrzymamy dla każdego m dwa nieliniowe równania różniczkowe zwyczajne względem funkcji X, Z

$$\tag{2.4}
\begin{cases}
\theta^2\dfrac{d^2X}{d\tau^2}+\beta_0 X-\beta_1 Z = b(\beta_2 X^3-\beta_3 X^2 Z+\beta_4 X Z^2-\beta_5 Z^3),\\
\theta^2\dfrac{d^2Z}{d\tau^2}+\gamma_0 Z-\gamma_1 X = b(-\gamma_2 X^3+\gamma_3 X^2 Z-\gamma_4 X Z^2+\gamma_5 Z^3).
\end{cases}$$

Poszczególne współczynniki układu (2.4) mają następujące wartości:

$$\beta_0 = \frac{c_2}{c_1}, \qquad \gamma_0 = \frac{d_2 r^2+g d_3}{d_1},$$

$$\beta_1 = \frac{c_3 r}{c_1}, \qquad \gamma_1 = \frac{d_4 r}{d_1},$$

$$\beta_2 = \frac{c_4}{c_1}, \qquad \gamma_2 = \frac{d_5 r}{d_1},$$

$$\beta_3 = \frac{c_5 r}{c_1}, \qquad \gamma_3 = \frac{d_6 r^2 + g d_7}{d_1},$$

$$\beta_4 = \frac{c_6 r^2 + g c_7}{c_1}, \qquad \gamma_4 = \frac{d_8 r^3 + g d_9 r}{d_1},$$

$$\beta_5 = \frac{c_8 r^3 + g c_9 r}{c_1}, \qquad \gamma_5 = \frac{d_{10} r^4 + g d_{11} r^2 + g^2 d_{12}}{d_1},$$

tu
$$r = \frac{1}{\mu}, \quad g = \left(\frac{\chi}{2}\right)^2. \quad \mu = \frac{R_1}{l}, \quad \chi = \frac{2h}{l},$$

$$c_1 = 1+2k+2\left(1+\frac{3}{2p^2}\right)k^2+\left(1+\frac{3}{p^2}\right)k^3+\frac{1}{5}\left(1+\frac{5}{p^2}-\frac{15}{2p^4}\right)k^4,$$

$$c_2 = \nu_3\frac{4p^2}{3}\left[1+2k+2\left(1+\frac{5}{4p^2}\right)k^2+\left(1+\frac{5}{2p^2}\right)k^3+\frac{1}{5}\left(1+\frac{25}{6p^2}-\frac{5}{4p^4}\right)k^4\right],$$

$$c_3 = \nu_3\frac{4}{3p}k^2\left(1+\frac{1}{2}k\right)+\nu_4\frac{4p}{3}\left[1+\frac{3}{2}k+\left(1+\frac{3}{2p^2}\right)k^2+\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{p^2}\right)k^3\right],$$

$$c_4 = \nu_1\nu_2 4p^2k^2\left[1+k+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{8p^2}\right)k^2\right]+\nu_1^2\frac{4p^4}{3}\left[1+2k+2\left(1-\frac{5}{12p^2}\right)k^2+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{5}{6p^2}\right)k^3+\frac{1}{5}\left(1-\frac{25}{18p^2}+\frac{655}{49p^4}\right)k^4\right]+\nu_2^2\frac{4p^2}{9}k^2\left[1+k+\frac{1}{3}\left(1+\frac{21}{4p^2}\right)k^2\right],$$

$$c_5 = \nu_1\nu_2 2p^3\left[1+\frac{3}{2}k+\left(1+\frac{5}{8p^2}\right)k^2+\frac{1}{4}\left(1+\frac{5}{4p^2}\right)k^3\right]+\nu_1^2\frac{14p}{3}k^2\left(1+\frac{1}{2}k\right)+$$
$$+\nu_2^2\frac{7p}{3}k^2\left(1+\frac{1}{2}k\right),$$

$$c_6 = \nu_1\nu_2 3k^2+\nu_1^2\frac{4p^2}{3}\left[1+k+\frac{1}{3}\left(1+\frac{27}{8p^2}\right)k^2\right]+\nu_2^2\frac{2p^2}{3}\left[1+k+\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{8p^2}\right)k^2\right],$$

$$c_7 = p^2c_4, \qquad c_8 = \nu_1\nu_2\frac{2p}{3}\left(1+\frac{1}{2}k\right), \qquad c_9 = \frac{p^2}{3}c_5,$$

$$d_1 = 1+\frac{5}{2}k+\frac{10}{3}\left(1-\frac{3}{2p^2}\right)k^2+\frac{5}{2}\left(1-\frac{3}{p^2}\right)k^3+\left(1-\frac{5}{p^2}+\frac{15}{2p^4}\right)k^4+$$
$$+\frac{1}{6}\left(1-\frac{15}{2p^2}+\frac{45}{2p^4}\right)k^5,$$

$$d_2 = \nu_3\frac{4}{3}\left[1+\frac{3}{2}k+\left(1-\frac{3}{2p^2}\right)k^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{2p^2}\right)k^3\right],$$

$$d_3 = \nu_3\frac{4p^4}{9}\left[1+\frac{5}{2}k+\frac{10}{3}k^2+\frac{5}{2}k^3+\left(1-\frac{1}{p^4}\right)k^4+\frac{1}{6}\left(1-\frac{3}{p^4}\right)k^5\right],$$

$$d_4 = \nu_3 \frac{2}{p} k^2 \left[1+k+\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2p^2}\right)k^2\right] + \nu_4 \frac{4p}{3}\left[1+2k+2\left(1-\frac{3}{2p^3}\right)k^2 + \right.$$

$$\left. + \left(1-\frac{3}{p^2}\right)k^3 + \frac{1}{5}\left(1-\frac{5}{p^2}+\frac{15}{2p^4}\right)k^4\right],$$

$$d_5 = \nu_1\nu_2 \frac{2p^3}{3}\left[1+2k+2\left(1-\frac{11}{8p^2}\right)k^2+\left(1-\frac{11}{4p^2}\right)k^3+\frac{1}{5}\left(1-\frac{55}{12p^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{295}{32p^4}\right)k^4\right] + \nu_1^2 p k^2\left[1+k+\frac{1}{3}\left(1-\frac{5}{24p^2}\right)k^2\right] + \nu_2^2 \frac{p}{2} k^2\left[1+k+\frac{1}{3}\left(1-\frac{15}{8p^2}\right)k^2\right],$$

$$d_6 = \nu_1\nu_2 2k^2\left(1+\frac{1}{2}k\right) + \nu_1^2\frac{4p^2}{3}\left[1+\frac{3}{2}k+\left(1-\frac{7}{8p^2}\right)k^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{7}{4p^2}\right)k^3\right]+$$

$$+\nu_2^2\frac{2p^2}{3}\left[1+\frac{3}{2}k+\left(1-\frac{15}{8p^2}\right)k^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{15}{4p^2}\right)k^3\right],$$

$$d_7 = \nu_1\nu_2\frac{16p^4}{3}k^3\left[1+\frac{3}{2}k+\left(1-\frac{19}{8p^2}\right)k^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{19}{4p^2}\right)k^3\right]+\nu_1^2\frac{4p^6}{3}\left[1+\frac{5}{2}k+\right.$$

$$+\frac{10}{3}\left(1-\frac{23}{8p^2}\right)k^2+\frac{5}{2}\left(1-\frac{23}{4p^2}\right)k^3+\left(1-\frac{115}{12p^5}+\frac{1801}{96p^4}\right)k^4+\frac{1}{6}\left(1-\frac{115}{8p^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1801}{32p^4}\right)k^5\right]+\nu_2^2\frac{4p^4}{9}k\Big[1+\frac{3}{2}k+\Big(1+\frac{5}{8p^2}k^2+\frac{1}{4}\left(1+\frac{5}{4p^2}\right)k^3\Big],$$

$$d_8 = \nu_1\nu_2 2pk^2\left[1+k+\frac{1}{3}\left(1-\frac{15}{8p^2}\right)k^2\right]+\nu_1^2\frac{1}{p}k^2,$$

$$d_9 = \nu_1\nu_2 2p^5\left[1+2k+2\left(1-\frac{27}{8p^2}\right)k^2+\left(1-\frac{27}{4p^2}\right)k^3+\frac{1}{5}\left(1-\frac{45}{4p^2}+\frac{3695}{288p^4}\right)k^4\right]+$$

$$+\nu_1^2\frac{113p^3}{27}k^2\left[1+k+\frac{1}{3}\left(1-\frac{4839}{904p^2}\right)k^2\right]+\nu_2^2\frac{113p^3}{54}k^2\left[1+k+\frac{1}{3}\left(1-\frac{3615}{904p^2}\right)k^2\right],$$

$$d_{10} = \nu_1^2\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{2}k\right),$$

$$d_{11} = \nu_1\nu_2\frac{20p^2}{9}k^2\left(1+\frac{1}{2}k\right)+\nu_1^2\frac{8p^4}{9}\left[1+\frac{3}{2}k+\left(1-\frac{39}{8p^2}\right)k^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{39}{4p^2}\right)k^3\right]+$$

$$+\nu_2^2\frac{4p^4}{9}\left[1+\frac{3}{2}k+\left(1-\frac{47}{8p^2}\right)k^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{47}{4p^2}\right)k^3\right],$$

$$d_{12} = \frac{p^2}{5}d_7,$$

przy czym

$$p = m\pi, \quad k = r\,\mathrm{tg}\beta, \quad \beta = \frac{\pi}{2}-\alpha.$$

W układzie równań (2.4) wyrazy nieliniowe są małe w porównaniu z liniowymi. W związku z tym możemy dany układ traktować jako słabo nieliniowy. Zastosujemy zatem do rozwiązania metodę małego parametru [2]. Aby wyznaczyć przybliżone rozwiązanie okresowe wykorzystujemy fakt, że nieliniowość układu wpływa na wielkość okresu drgań swobodnych. W związku z tym poszukujemy rozwiązania w postaci rozwinięć

$$\begin{cases} X = X_0+bX_1+b^2X_2+\ \dots, \\ Z = Z_0+bZ_1+b^2Z_2+\ \dots, \\ \theta^2 = \theta_0^2+b\theta_1+b^2\theta_2+\ \dots . \end{cases} \tag{2.5}$$

Rozwinięcie poszukiwanej częstości drgań w szereg względem potęg parametru b pozwala wyeliminować z rozwiązania człony sekularne i uzyskać przybliżone rozwiązanie okresowe.

Po podstawieniu zależności (2.5) do układu (2.4) i rozwinięciu lewej i prawej strony równań w szeregi względem potęg parametru b oraz przyrównaniu do siebie wyrazów stojących przy tych samych potęgach b, uzyskamy rekurencyjne układy równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \theta_0^2\dfrac{d^2X_0}{d\tau^2}+\beta_0X_0-\beta_1Z_0 = 0, \\ \theta_0^2\dfrac{d^2Z_0}{d\tau^2}+\gamma_0Z_0-\gamma_1X_0 = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} \theta_0^2\dfrac{d^2X_1}{d\tau^2}+\beta_0X_1-\beta_1Z_1 = -\theta_1\dfrac{d^2X_0}{d\tau^2}+\beta_2X_0^3-\beta_3X_0^2Z_0+\beta_4X_0Z_0^2-\beta_5Z_0^3, \\ \theta_0^2\dfrac{d^2Z_1}{d\tau^2}+\gamma_0Z_1-\gamma_1Z_1 = -\theta_1\dfrac{d^2Z_0}{d\tau^2}-\gamma_2X_0^3+\gamma_3X_0^2Z_0-\gamma_4X_0Z_0^2+\gamma_5Z_0^3, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} \theta_0^2\dfrac{d^2X_2}{d\tau^2}+\beta_0X_2-\beta_1Z_2 = -\theta_2\dfrac{d^2X_0}{d\tau^2}-\theta_1\dfrac{d^2X_1}{d\tau^2}+3\beta_2X_0^2X_1-\beta_3(X^2Z_1+ \\ \qquad +2X_0Z_0X_1)+\beta_4(Z_0^2X_1+2X_0Z_0Z_1)-3\beta_5Z_0^2Z_1, \\ \theta_0^2\dfrac{d^2Z_2}{d\tau^2}+\gamma_0Z_2-\gamma_1X_2 = -\theta_2\dfrac{d^2Z_0}{d\tau^2}-\theta_1\dfrac{d^2Z_1}{d\tau^2}-3\gamma_2X_0^2X_1+ \\ \qquad +\gamma_3(X_0^2Z_1+2X_0Z_0X_1)-\gamma_4(Z_0^2X_1+2X_0Z_0Z_1)+3\gamma_5Z_0^2Z_1, \end{cases} \tag{2.8}$$

. . . .

Niech funkcja $Z(\tau)$ spełnia warunki początkowe

$$Z(0) = B, \quad \dot{Z}(0) = 0, \tag{2.9}$$

wtedy

$$\begin{aligned} Z_0(0) &= B, & Z_1(0) &= 0, & Z_2(0) &= 0, \dots, \\ \dot{Z}_0(0) &= 0, & \dot{Z}_1(0) &= 0, & \dot{Z}_2(0) &= 0, \dots, \end{aligned} \tag{2.10}$$

gdzie kropka oznacza pochodną względem czasu.

Rozwiązanie nasze ograniczymy do drgań swobodnych jednoczęstościowych. W tym przypadku warunki początkowe dla funkcji $X(\tau)$ zależą od warunków początkowych dla $Z(\tau)$ i wynikają z rozwiązania zagadnienia jako warunek konieczny drgań jednoczęstościowych.

Rozwiązania szczególnego układu równań (2.6) poszukujemy w postaci

$$\begin{cases} X_0 = A_1 \cos\tau + A_2 \sin\tau, \\ Z_0 = B_1 \cos\tau + B_2 \sin\tau. \end{cases}$$

Podstawiając założoną postać rozwiązania do (2.6) uzyskamy dwa algebraiczne układy równań

$$\begin{cases} (\beta_0 - \theta_0^2)A_1 - \beta_1 B_1 = 0, \\ -\gamma_1 A_1 + (\gamma_0 - \theta_0^2)B_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\beta_0 - \theta_0^2)A_2 - \beta_1 B_2 = 0, \\ -\gamma_1 A_2 + (\gamma_0 - \theta_0^2)B_2 = 0; \end{cases}$$

stąd warunek istnienia niezerowego rozwiązania ma postać

$$\begin{vmatrix} \beta_0 - \theta_0^2, & -\beta_1 \\ -\gamma_1, & \gamma_0 - \theta_0^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwinięcie wyznacznika daje równanie dwukwadratowe na częstość drgań własnych układu zlinearyzowanego ($b = 0$), mianowicie

$$(\theta_0^2)^2 - (\beta_0 + \gamma_0)\theta_0^2 + \beta_0\gamma_0 - \beta_1\gamma_1 = 0,$$

skąd

$$\theta_0^2 = \frac{\beta_0 + \gamma_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_0 - \gamma_0}{2}\right)^2 + \beta_1\gamma_1}. \tag{2.11}$$

Układ zlinearyzowany ma dwa szczególne rozwiązania harmoniczne o częstościach określonych wzorem (2.11). Pierwsza wyższa częstość (znak +) odpowiada drganiom podłużnym, druga niższa częstość (znak −) drganiom poprzecznym powłoki. Drgania te zachodzą dla ściśle określonych wartości współczynnika postaci drgań własnych

$$\lambda = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}.$$

Wartości te wyznaczamy ze związku

$$\lambda = \frac{\beta_1}{\beta_0 - \theta_0^2} = \frac{\gamma_0 - \theta_0^2}{\gamma_1}. \tag{2.12}$$

Ponieważ $A_1 = \lambda B_1$, $A_2 = \lambda B_2$, więc dla warunków początkowych $Z_0(0) = B$, $\dot{Z}_0(0) = 0$, mamy $B_1 = B$, $A_1 = \lambda B$, $B_2 = 0$, $A_2 = 0$. Ostatecznie rozwiązanie szczególne układu zlinearyzowanego (2.6) ma postać

$$X_0 = \lambda B \cos\tau, \qquad Z_0 = B\cos\tau. \tag{2.13}$$

Po podstawieniu powyższego rozwiązania do układu (2.7) uzyskujemy układ równań

$$\begin{aligned} &\theta_0^2 \frac{d^2X_1}{d\tau^2} + \beta_0 X_1 - \beta_1 Z_1 = P_1\cos\tau + P_2\cos 3\tau, \\ &\theta_0^2 \frac{d^2Z_1}{d\tau^2} + \gamma_0 Z_1 - \gamma_1 X_1 = R_1\cos\tau + R_2\cos 3\tau, \end{aligned} \tag{2.14}$$

gdzie $P_1 = \lambda B\theta_1 + 3B^3 p_1$, $\quad P_2 = B^3 p_1$, $\quad R_1 = B\theta_1 + 3B^3 r_1$, $\quad R_2 = B^3 r_1$, zaś

$$p_1 = \frac{1}{4}(\beta_2\lambda^3 - \beta_3\lambda^2 + \beta_4\lambda - \beta_5),$$

$$r_1 = \frac{1}{4}(-\gamma_2\lambda^3 + \gamma_3\lambda^2 - \gamma_4\lambda + \gamma_5).$$

Aby uzyskać periodyczne rozwiązanie powyższego układu, zakładamy rozwiązanie szczególne w postaci

$$X_1 = C_1\cos\tau + C_2\cos 3\tau + C_3\sin\tau + C_4\sin 3\tau,$$

$$Z_1 = D_1\cos\tau + D_2\cos 3\tau + D_3\sin\tau + D_4\sin 3\tau,$$

które po podstawieniu do (2.14) daje cztery algebraiczne układy równań:

$$\begin{aligned} &(\beta_0-\theta_0^2)C_1-\beta_1 D_1 = P_1, &&(\beta_0-9\theta_0^2)C_2-\beta_1 D_2 = P_2,\\ &-\gamma_1 C_1+(\gamma_0-\theta^2)D_1 = R_1, &&-\gamma_1 C_2+(\gamma_0-9\theta_0^2)D_2 = R_2,\\ &(\beta_0-\theta_0^2)C_3-\beta_1 D_3 = 0, &&(\beta_0-9\theta_0^2)C_4-\beta_1 D_4 = 0,\\ &-\gamma_1 C_3+(\gamma_0-\theta_0^2)D_3 = 0, &&-\gamma_1 C_4+(\gamma_0-9\theta_0^2)D_4 = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Wyznaczniki charakterystyczne układów równań $(2.15)_1$ i $(2.15)_3$ są równe zeru. Warunek istnienia rozwiązań układu $(2.15)_1$ ma więc postać

$$\begin{vmatrix} P_1, & -\beta_1 \\ R_1, & \gamma_0-\theta_0^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_0-\theta_0^2, & P_1 \\ -\gamma_1, & R_1 \end{vmatrix} = 0,$$

stąd wykorzystując związek (2.12) mamy

$$P_1\lambda\gamma_1 + R_1\beta_1 = 0.$$

Po podstawieniu P_1 i R_1 uzyskujemy warunek

$$(\lambda B\theta_1 + 3B^3 p_1)\lambda\gamma_1 + (B\theta_1 + 3B^3 r_1)\beta_1 = 0,$$

z którego wyznaczamy

$$\theta_1 = -B^2\vartheta_1, \tag{2.16}$$

gdzie

$$\vartheta_1 = \frac{3(\lambda\gamma_1 p_1 + \beta_1 r_1)}{\lambda^2\gamma_1 + \beta_1}.$$

Dla wyznaczonej wartości θ_1 równania układu $(2.15)_1$ są liniowo zależne. Między stałymi C_1 i D_1 zachodzi związek

$$C_1 = \lambda\left(\frac{3(p_1 - \lambda r_1)}{\lambda^2\gamma_1 + \beta_1}B^3 + D_1\right).$$

Podobnie równania układu $(2.15)_3$ są liniowo zależne, stąd związek między stałymi

$$C_3 = \lambda D_3.$$

Z układu równań $(2.15)_2$ wyznaczamy stałe C_2 i D_2, otrzymując

$$C_2 = B^3 x_2, \quad D_2 = B^3 z_1,$$

gdzie

$$x_2 = \frac{e_2 p_1 + \beta_1 r_1}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, \qquad e_1 = \beta_0 - 9\theta_0^2,$$
$$e_2 = \gamma_0 - 9\theta_0^2,$$
$$z_1 = \frac{\gamma_1 p_1 + e_1 r_1}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}.$$

Analogicznie z równań $(2.15)_4$ mamy

$$C_4 = D_4 = 0.$$

Wykorzystując warunki początkowe $Z_1(0) = 0$, $\dot{Z}_1(0) = 0$ dostaniemy

$$D_1 + D_2 = 0, \qquad D_3 + 3D_4 = 0,$$

stąd

$$D_1 = -D_2 = -B^3 z_1 \quad \text{oraz} \quad D_3 = -3D_4 = 0.$$

Posługując się wyznaczonymi wartościami stałych D_1 i D_3 uzyskujemy

$$C_1 = B^3 x_1 \quad \text{tu} \quad x_1 = \lambda\left(\frac{3(p_1 - \lambda r_1)}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1} - z_1\right),$$
$$C_3 = 0.$$

Rozwiązanie szczególne układu (2.14) ma więc postać

$$\text{(2.17)} \qquad \begin{cases} X_1 = B^3(x_1 \cos\tau + x_2 \cos 3\tau), \\ Z_1 = B^3 z_1 (\cos 3\tau - \cos\tau). \end{cases}$$

Podobnie postępując uzyskujemy

$$\text{(2.18)} \qquad \begin{cases} X_2 = B^5(x_3 \cos\tau + x_4 \cos 3\tau + x_5 \cos 5\tau), \\ Z_2 = B^5[z_2(\cos 3\tau - \cos\tau) + z_3(\cos 5\tau - \cos\tau)], \end{cases}$$

dla $\theta_2 = -B^4 \vartheta_2$, gdzie

$$\text{(2.19)} \qquad \begin{aligned} \vartheta_2 &= \frac{\lambda \gamma_1 p_2 + \beta_1 r_2}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1}, & x_3 &= \lambda\left(\frac{p_2 - \lambda r_2}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1} - z_2 - z_3\right), \\ z_2 &= \frac{\gamma_1 p_3 + e_1 r_3}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, & x_4 &= \frac{e_2 p_3 + \beta_1 r_3}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, \\ z_3 &= \frac{\gamma_1 p_4 + e_3 r_4}{e_3 e_4 - \beta_1 \gamma_1}, & x_5 &= \frac{e_4 p_4 + \beta_1 r_4}{e_3 e_4 - \beta_1 \gamma_1}, \end{aligned}$$

przy czym

$$e_3 = \beta_0 - 25\theta_0^2,$$
$$e_4 = \gamma_0 - 25\theta_0^2,$$

$$\begin{aligned} p_2 &= -x_1 \vartheta_1 + (3x_1 + x_2)p_5 - 2z_1 p_6, & r_2 &= z_1 \vartheta_1 + (3x_1 + x_2) r_5 - 2z_1 r_6, \\ p_3 &= -9x_2 \vartheta_1 + (x_1 + 2x_2)p_5 + z_1 p_6, & r_3 &= -9z_1 \vartheta_1 + (x_1 + 2x_2) r_5 + z_1 r_6, \\ p_4 &= x_2 p_5 + z_1 p_6, & r_4 &= x_2 r_5 + z_1 r_6, \\ p_5 &= \frac{1}{4}(3\beta_2 \lambda^2 - 2\beta_3 \lambda + \beta_4), & r_5 &= \frac{1}{4}(-3\gamma_2 \lambda^2 + 2\gamma_3 \lambda - \gamma_4), \\ p_6 &= \frac{1}{4}(-\beta_3 \lambda^2 + 2\beta_4 \lambda - 3\beta_5), & r_6 &= \frac{1}{4}(\gamma_3 \lambda^2 - 2\gamma_4 \lambda + 3\gamma_5). \end{aligned}$$

Ograniczając się do drugiego przybliżenia uzyskamy poszukiwane rozwiązanie w postaci

$$
(2.20)\quad \begin{cases}
X = \lambda B\cos\tau + bB^3(x_1\cos\tau + x_2\cos 3\tau) + b^2B^5(x_3\cos\tau + x_4\cos 3\tau + \\
\qquad + x_5\cos 5\tau) + \ldots, \\
Z = B\cos\tau + bB^3 z_1(\cos 3\tau - \cos\tau) + b^2B^5[z_2(\cos 3\tau - \cos\tau) + \\
\qquad + z_3(\cos 5\tau - \cos\tau)] + \ldots, \\
\theta^2 = \theta_0^2 - bB^2\vartheta_1 - b^2B^4\vartheta_2 - \ldots.
\end{cases}
$$

Powyższe rozwiązanie jest szeregiem potęgowym ze względu na wielkość bB^2. Aby szereg był szybko zbieżny, co umożliwia korzystanie tylko z kilku jego pierwszych składników, wartość bB^2 musi być mała.

Na podstawie prób rozciągania [1] przy naprężeniach nie przewyższających wartości 1000 kG/cm^2 uzyskano dla czystej miedzi następujące wielkości stałych:

$$K = 1{,}37\cdot 10^6\ \mathrm{kG/cm^2},\quad G = 0{,}46\cdot 10^6\ \mathrm{kG/cm^2},\quad g_2 = 0{,}18\cdot 10^6,$$

stąd

$$b = 0{,}323\cdot 10^6.$$

Ponieważ przyjęto związki geometryczne w postaci liniowej ograniczając analizę do małych drgań, więc wielkość bB^2 może odgrywać rolę małego parametru, a uzyskane rozwiązanie ma charakter asymptotyczny dla małych wartości parametru bB^2.

Na skutek nieliniowości układu ($b \neq 0$) w rozwiązaniu pojawiły się wyższe harmoniczne, a częstość drgań własnych ulega zmianie i zależy od amplitudy.

3. Analiza wyników

W celu zbadania wpływu nieliniowości sprężystej materiału na drgania powłoki przeanalizowano następujące funkcje:

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_{\mathrm{I}}(A) = \lambda + A\nu_0^2(x_1 + x_2), &&\Lambda_{\mathrm{II}}(A) = \lambda + A\nu_0^2(x_1 + x_2) + A^2\nu_0^4(x_3 + x_4 + x_5),\\
&\theta_{\mathrm{I}}^2(A) = \theta_0^2 - A\nu_0^2\vartheta_1, &&\theta_{\mathrm{II}}^2(A) = \theta_0^2 - A\nu_0^2\vartheta_1 - A^2\nu_0^4\vartheta_2.
\end{aligned}
$$

Indeksy I, II oznaczają tu odpowiednio pierwsze i drugie przybliżenie. Bezwymiarowy argument $A = a_3E^2B^2$ jest iloczynem stałej materiałowej a_3 określającej nieliniowość sprężystą materiału [wyznaczonej przy jednoosiowym rozciąganiu — ściskaniu (1.4)] kwadratu modułu Younga E i kwadratu bezwymiarowej amplitudy drgań poprzecznych B. Współczynnik postaci drgań własnych Λ określa stosunek amplitudy drgań podłużnych do amplitudy drgań poprzecznych, dla którego zachodzą analizowane drgania własne powłoki,

$$\Lambda = \frac{X(0)}{Z(0)},$$

θ^2 zaś jest kwadratem bezwymiarowej częstości drgań własnych powłoki.

W układzie współrzędnych $\Lambda - A$ oraz $\theta^2 - A$ wykresy pierwszego przybliżenia analizowanych funkcji są liniami prostymi, drugiego przybliżenia — parabolami. Krzywe te charakteryzujące drgania jednego rodzaju (podłużne lub poprzeczne) zależą od następujących pięciu parametrów:

m oznacza liczbę określającą ilość półfal na długości powłoki, μ — stosunek najmniejszego promienia krzywizny powłoki do jej długości, β — połowę kąta wierzchołkowego stożka, χ — stosunek grubości powłoki do jej długości, ν — liczbę Poissona.

Pozostałe parametry:

a_3 — współczynnik określający nieliniowość materiału (1.4), E — moduł Younga, ϱ — gęstość materiału powłoki, l — długość powłoki mierzona wzdłuż tworzącej — zawarte są w bezwymiarowych współrzędnych

$$A = a_3 E^2 \left(\frac{W_{\max}}{l}\right)^2, \qquad \theta^2 = \frac{\varrho l^2 \omega^2}{E},$$

gdzie $W_{\max}$ jest amplitudą drgań poprzecznych (giętnych), ω — pulsacją podstawową drgań rozważanej powłoki.

Materiałom o «miękkich» charakterystykach ($a_3 > 0$) odpowiada część wykresu dla $A > 0$, materiałom liniowo sprężystym ($a_3 = 0$) odpowiada $A = 0$, materiałom o «sztywnych» charakterystykach ($a_3 < 0$) odpowiada część wykresu dla $A < 0$.

Jako przykład naszych rozważań przeanalizujemy drgania własne powłok stożkowych (przy $m = 1$) o następujących wartościach parametrów:

$$\mu = 0{,}5, \quad \mathrm{tg}\beta = 0{,}2, \quad \chi = 4 \cdot 10^{-3}, \quad \nu = 0{,}3.$$

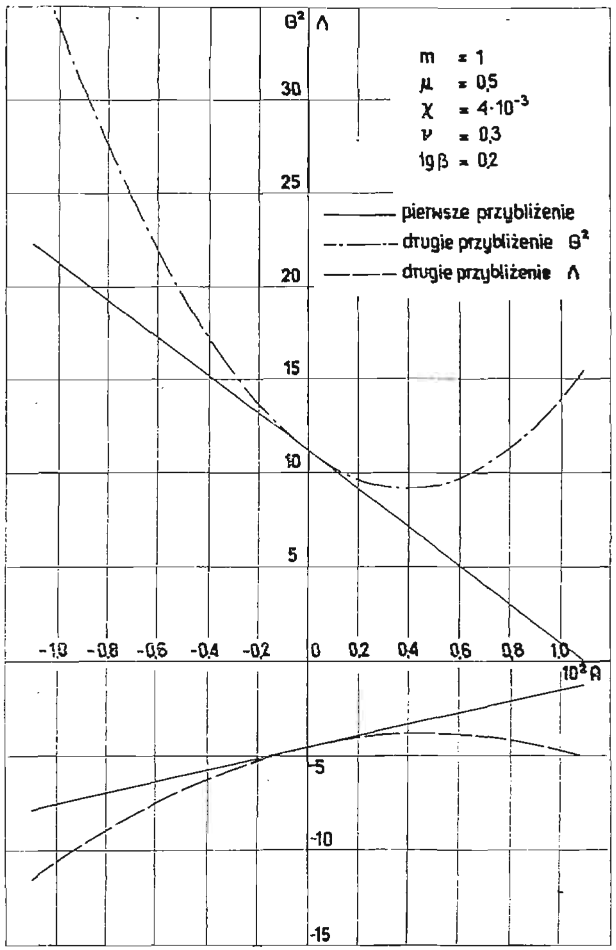
Na rys. 1 przedstawiono wykresy funkcji $\Lambda(A)$ oraz $\theta^2(A)$ dla drgań podłużnych, na rys. 2 dla drgań poprzecznych. Drgania podłużne charakteryzują się znacznie wyższą częstością drgań od drgań poprzecznych. Oczywiście dla drgań podłużnych zachodzi związek $|\Lambda| > 1$, natomiast dla drgań poprzecznych $|\Lambda| < 1$. Jak wynika z przytoczonego przykładu dla charakterystyk «miękkich» ze wzrostem amplitudy częstość maleje, dla «sztywnych» — rośnie. Cecha ta jest silniejsza dla materiałów o większym współczynniku $|a_3|$.

Wpływ parametrów μ oraz β na drgania poprzeczne przy niezmienionych wartościach pozostałych parametrów ilustrują odpowiednio rys. 3 i 4. Przy $\beta = 0$ uzyskujemy charakterystyki dla powłoki walcowej.

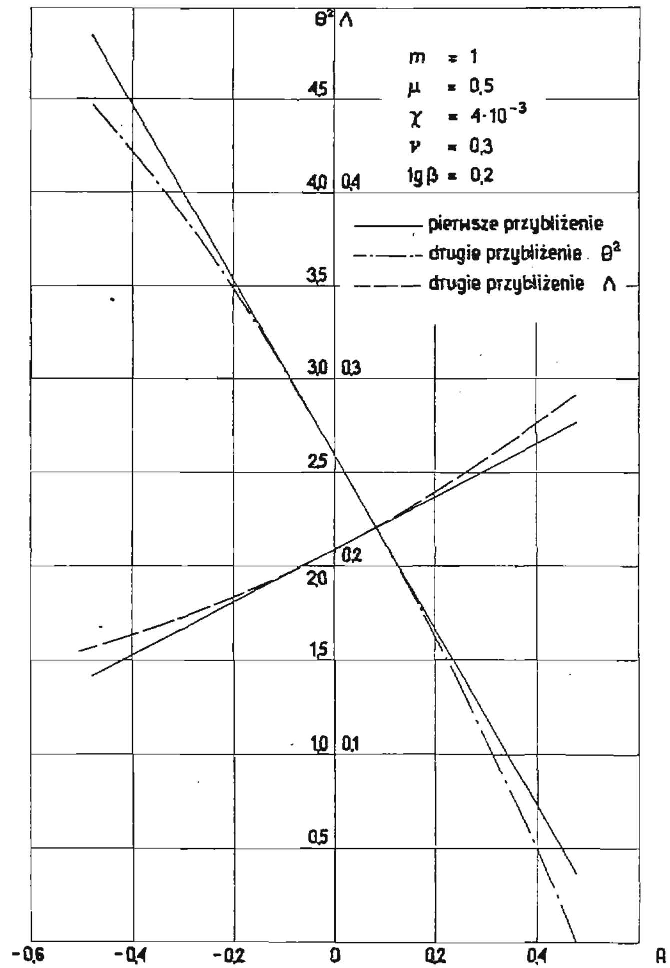
Zmiany parametru χ w zakresie od $2 \cdot 10^{-3}$ do $8 \cdot 10^{-3}$ nie wpływają na zmianę wartości analizowanych funkcji.

Ściśliwość materiału dość znacznie wpływa na częstość drgań własnych oraz na współczynnik postaci drgań własnych, w przypadku materiału nieliniowo sprężystego. W przypadku materiału podlegającego prawu Hooke'a ściśliwość materiału wpływa w małym stopniu na częstość drgań własnych. Wpływ ściśliwości na analizowane funkcje w przypadku drgań poprzecznych przedstawia rys. 5. Przyjmowanie założenia upraszczającego, iż materiał powłoki jest nieściśliwy, może być przyczyną dużych błędów w przypadku zastosowania uproszczonej teorii do analizy drgań powłok wykonanych z materiałów nieliniowo sprężystych.

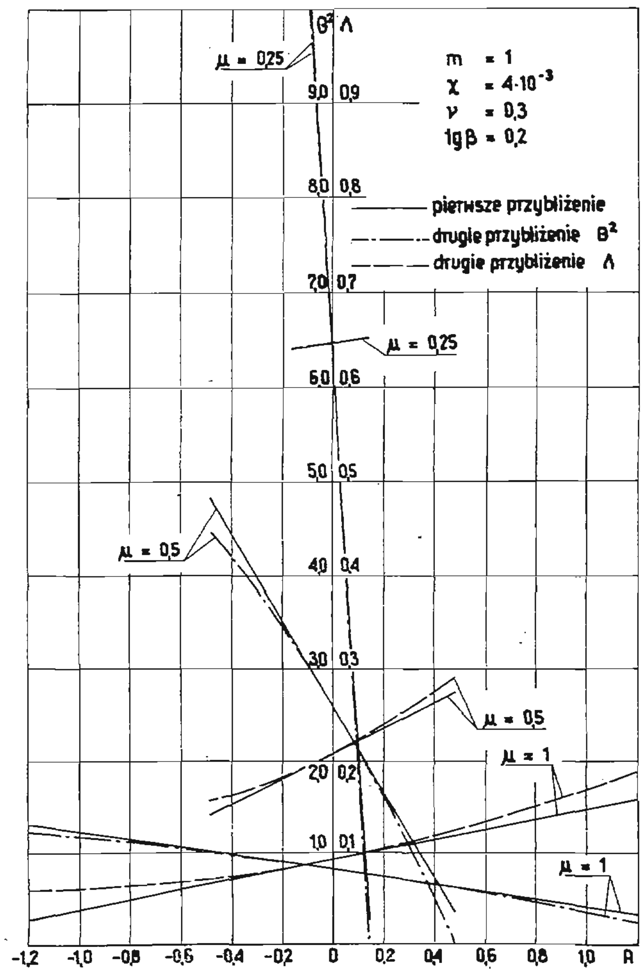
Zjawisko zmiany częstości drgań własnych ze zmianą amplitudy ma duże znaczenie w przypadku drgań wymuszonych, a w szczególności w przypadku rezonansu.


Θ^2 Λ
$m = 1$
$\mu = 0{,}5$
$\chi = 4 \cdot 10^{-3}$
$\nu = 0{,}3$
$\lg\beta = 0{,}2$
pierwsze przybliżenie
drugie przybliżenie Θ^2
drugie przybliżenie Λ
30
25
20
15
10
5
-5
-10
-15
-1,0 -0,8 -0,6 -0,4 -0,2 0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0
$10^2 A$

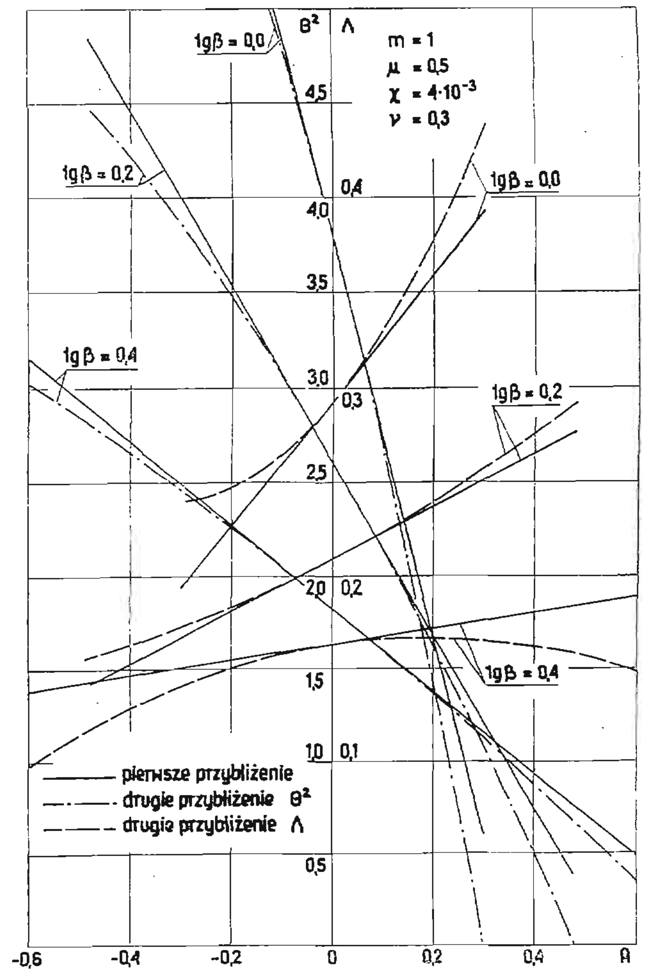
Rys. 1


Θ^2 Λ
$m = 1$
$\mu = 0{,}5$
$\chi = 4 \cdot 10^{-3}$
$\nu = 0{,}3$
$\lg\beta = 0{,}2$
pierwsze przybliżenie
drugie przybliżenie Θ^2
drugie przybliżenie Λ
4,5
4,0 0,4
3,5
3,0 0,3
2,5
2,0 0,2
1,5
1,0 0,1
0,5
-0,6 -0,4 -0,2 0 0,2 0,4
A

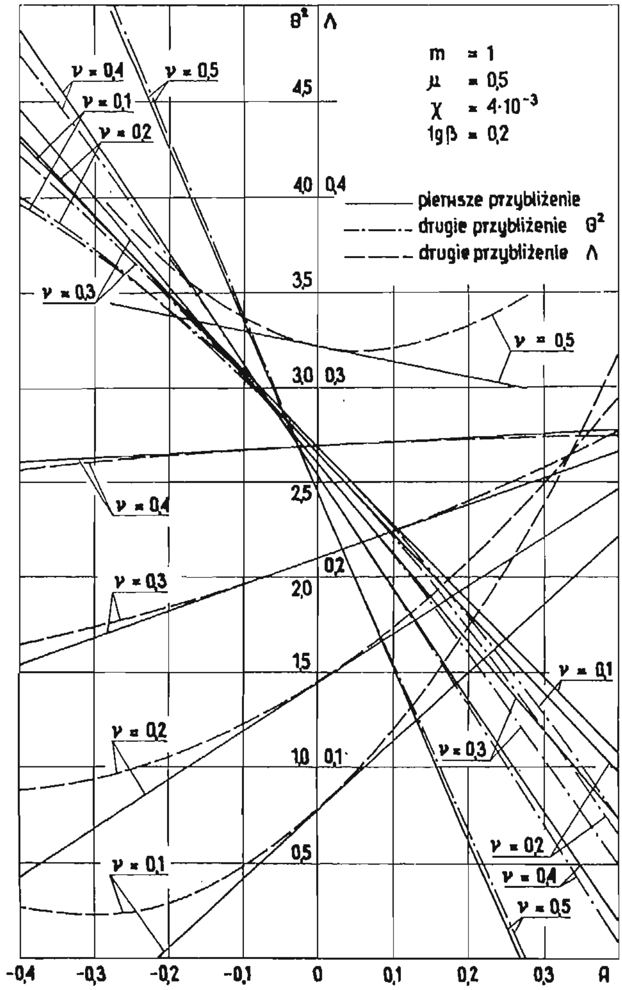
Rys. 2


Θ^2 Λ
m = 1
χ = 4·10⁻³
ν = 0,3
lgβ = 0,2
pierwsze przybliżenie
drugie przybliżenie Θ²
drugie przybliżenie Λ
μ = 0,25
μ = 0,5
μ = 1
-1,2 -1,0 -0,8 -0,6 -0,4 -0,2 0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 A

Rys. 3


Θ^2 Λ
m = 1
μ = 0,5
χ = 4·10⁻³
ν = 0,3
lgβ = 0,0
lgβ = 0,2
lgβ = 0,4
pierwsze przybliżenie
drugie przybliżenie Θ²
drugie przybliżenie Λ
-0,6 -0,4 -0,2 0 0,2 0,4 A

Rys. 4



Rys. 5

Literatura cytowana w tekście

1. H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin 1958.
2. N. Minorski, *Drgania nieliniowe*, Warszawa 1967.
3. Ю. Ю. Трапезин, *О малых колебаниях круговой тонкостенной конической оболочки*, Расчёты на прочность, в. 2, Москва 1958.
4. F. Twardosz, *Osiowo-symetryczne drgania nieliniowo-sprężystej powłoki stożkowej*, Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk, zeszyt 8, Poznań 1971.
5. В. С. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва 1949.

Резюме

СОБСТВЕННЫЕ КРУГЛОСИММЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СЖИМАЕМОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

В работе исследуются собственные колебания (с круговой симметрией) свободно опертой по краям тонкой оболочки в виде усеченного конуса из однородного, изотропного, линейно упругого, сжимаемого материала. При ограничении анализа к случаю малых колебаний, допустимо использование геометрически линейных зависимостей. Получена система двух нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка, определяющих продольные и поперечные колебания. Уравнения сведены методом Бубнова-Галеркина к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При предложении о слабой нелинейности, уравнения решены с помощью метода малого параметра. Решения ограничивались ко второму приближению. Полученные решения, иллюстрирующие влияние упругой нелинейности на колебания оболочки, представлены графически.

Summary

ROTATIONALLY SYMMETRIC FREE VIBRATIONS OF A CONICAL SHELL MADE OF COMPRESSIBLE, NON-LINEAR ELASTIC MATERIAL

The paper deals with the analysis of rotationally free vibrations of a thin truncated conical shell, simply supported on both edges. The material of the shell is assumed to be homogeneous, isotropic, non-linear elastic and compressible. The problem is limited to the analysis of small vibrations what makes it possible to use the linear geometric relations. As a result, the system of partial differential equations of fourth order is obtained describing the longitudinal and transverse vibrations. By applying the variational Bubnov-Galerkin method, partial equations are reduced to the ordinary differential equations. Assuming weak non-linearity, the equations are then solved by the perturbation method, the solution being limited only to second approximation. The equations obtained describing the influence of elastic non-linearity of the material on the vibrations of the shell have been presented graphically.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA, POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 listopada 1974 r.