

## ZGINANIE PŁYTY KWADRATOWEJ Z CENTRYCZNIE PÓŁOŻONYM OTWOREM KWADRATOWYM

GRZEGORZ JEMIELITA (WARSZAWA)

### Wstęp

Zagadnienie zginania płyt z otworami badano głównie z uwagi na koncentrację naprężeń w pobliżu otworu. Najwięcej rozwiązań uzyskano stosując metodę funkcji zmiennej zespolonej (por. [1, 2], s. 573—590). Formalnie ściśle rozwiązanie płyty kwadratowej, swobodnie podpartej na obwodzie zewnętrznym, z centrycznie położonym otworem kwadratowym, swobodnie podpartym, podano w [3] (por. też [4] s. 358, [2] s. 483—488). Z powodu trudności w uzyskaniu rozwiązań zamkniętych lub formalnie ścisłych dla płyt prostokątnych z otworem w wielu przypadkach stosowano metody przybliżone, takie jak: metoda elementów skończonych ([5], s. 180), metoda różnic skończonych [6] i jej odmianę — metodę elementów podstawowych opracowaną przez REIPERTA [7]. W niniejszej pracy podamy formalnie ściśle rozwiązanie płyty kwadratowej z centrycznie położonym otworem kwadratowym. Rozwiązania zostały uzyskane za pomocą pojedynczych szeregów Fouriera.

W punkcie pierwszym podajemy metodę rozwiązania zagadnienia płyty kwadratowej swobodnie podpartej na obwodzie zewnętrznym; brzeg otworu, zwany dalej brzegiem wewnętrznym, może być utwierdzony, swobodnie podparty, utwierdzony przesuwnie lub swobodny.

W punkcie drugim szczegółowo rozpatrzono płyty, na które działa obciążenie  $q = \text{const}$ , symetryczne względem wszystkich osi symetrii płyty.

Przypadek graniczny — płyta pełna — został rozpatrzony w punkcie trzecim. Możliwości rozszerzenia proponowanej metody na płyty o innym kształcie i innych warunkach podparcia brzegu zewnętrznego podano w punkcie czwartym. Praca jest zakończona przykładami liczbowymi. W całej pracy zakładamy, że rozpatrywane płyty są izotropowe o stałej sztywności  $D$ .

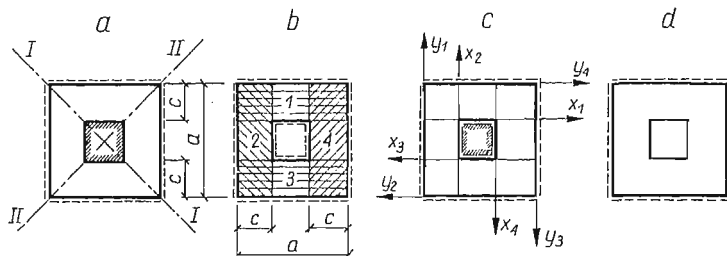
### 1. Metoda rozwiązania zagadnienia

Rozpatrujemy płyty pokazane na rys. 1. W rozważanych płytach wyróżniamy dwie osie symetrii pokazane na rys. 1a. Z płyty kwadratowej wyodrębniamy płyty prostokątne, każda o wymiarach  $a \times c$  (rys. 1b). Wprowadza się cztery układy współrzędnych, pokazane na rys. 1c.

Korzystając z zasady superpozycji, dowolne obciążenie działające na płytę  $q(x, y)$  można rozłożyć na cztery schematy, które kolejno oznaczymy:  $S-S$ ,  $S-A$ ,  $A-S$ ,  $A-A$  (rys. 2).

Funkcję ugięcia  $W_1(x_1, y_1)$  pierwszej płyty prostokątnej możemy zapisać następującym wzorem

$$(1.1) \quad W_1(x_1, y_1) = W_1^{SS}(x_1, y_1) + W_1^{SA}(x_1, y_1) + W_1^{AS}(x_1, y_1) + W_1^{AA}(x_1, y_1).$$

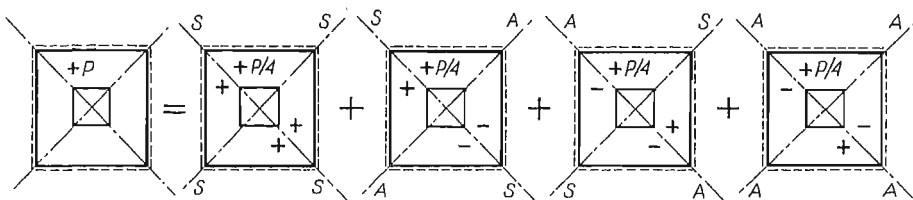


Rys. 1

Korzystając z symetrii zagadnienia, funkcję ugięcia dla płyt prostokątnych: drugiej, trzeciej i czwartej wyrażamy przez funkcje występujące w (1.1):

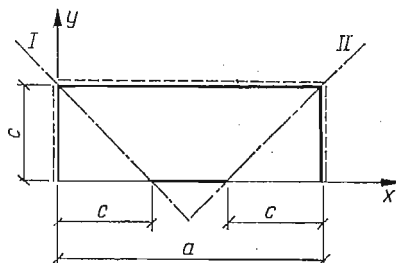
$$(1.2) \quad \begin{aligned} W_2(x_2, y_2) &= W_1^{SS}(a-x_2, y_2) + W_1^{SA}(a-x_2, y_2) - W_1^{AS}(a-x_2, y_2) - \\ &\quad - W_1^{AA}(a-x_2, y_2), \\ W_3(x_3, y_3) &= W_1^{SS}(x_3, y_3) - W_1^{SA}(x_3, y_3) - W_1^{AS}(x_3, y_3) + W_1^{AA}(x_3, y_3), \\ W_4(x_4, y_4) &= W_1^{SS}(a-x_4, y_4) - W_1^{SA}(a-x_4, y_4) + W_1^{AS}(a-x_4, y_4) - W_1^{AA}(a-x_4, y_4). \end{aligned}$$

Z powyższego wynika, iż rozwiązanie zagadnienia płyty kwadratowej z otworem sprowadza się faktycznie do rozwiązania płyty prostokątnej oznaczonej na rys. 1b numerem



Rys. 2

pierwszym. Płyta ta jest podparta swobodnie na trzech brzegach, a na czwartym brzegu występują nieciągłe warunki brzegowe. Sposób podparcia oraz przyjęty w dalszych rozważaniach układ współrzędnych pokazano na rys. 3.



Rys. 3

Zależności między wielkościami geometrycznymi lub statycznymi na brzegu  $y = 0$  a odpowiednimi im wielkościami wzdłuż linii  $x = c$  i  $x = a - c$  dla wszystkich schematów obciążeń zestawiono w tabelcy pierwszej.

Tablica 1

Funkcja	Schemat znak funkcji				Funkcja	Przedział	
	S-S	S-A	A-S	A-A			
$W(x, 0) =$	+	+	—	—	$W(c, c-y) _{y=x}$	$0 \leq x \leq c$	1
	+	—	+	—	$W(c', y) _{y=x-c'}$	$c' \leq x \leq a$	2
$\varphi_y(x, 0) =$	—	—	+	+	$\varphi_x(c, c-y) _{y=x}$	1	
	+	—	+	—	$\varphi_x(c', y) _{y=x-c'}$	2	
$M_y(x, 0) =$	+	+	—	—	$M_x(c, c-y) _{y=x}$	1	
	+	—	+	—	$M_x(c', y) _{y=x-c'}$	2	
$V_y(x, 0) =$	—	—	+	+	$V_x(c, c-y) _{y=x}$	1	
	+	—	+	—	$V_x(c', y) _{y=x-c'}$	2	

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} W(x, y) &= \Phi_x^1(x, y) = \Phi_y^1(x, y) && \text{funkcja ugięcia,} \\ \varphi_y(x, y) &= \Phi_y^2(x, y), \quad \varphi_x(x, y) = \Phi_x^2(x, y) && \text{kąty obrotu,} \\ M_y(x, y) &= \Phi_y^3(x, y), \quad M_x(x, y) = \Phi_x^3(x, y) && \text{momenty zginające,} \\ V_y(x, y) &= \Phi_y^4(x, y), \quad V_x(x, y) = \Phi_x^4(x, y) && \text{zastępcze siły poprzeczne.} \end{aligned}$$

Korzystając z oznaczeń (1.3), zależności z tabelcy pierwszej można przedstawić ogólnie za pomocą funkcji:

$$(1.4) \quad \Phi_y^j(x, 0) = \begin{cases} (-1)^{k_I+J+1} \Phi_x^j(c, c-y)|_{y=x} & 0 < x < c, \\ \Phi_y^j(x, 0) & c < x < c', \\ (-1)^{k_{II}} \Phi_x^j(c', y)|_{y=x-c'} & c' < x < a, \end{cases}$$

gdzie  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $c' = a - c$ ,

$$k_I, k_{II} = \begin{cases} 0 & \text{gdy oś I, II — oś symetrii (S),} \\ 1 & \text{gdy oś I, II — oś antysymetrii (A).} \end{cases}$$

Aby spełnić warunki brzegowe dla  $x = 0$  i  $x = a$ , funkcję ugięcia płyty  $W(x, y)$  wyrażamy za pomocą pojedynczego szeregu Fouriera o postaci

$$(1.5) \quad W(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} W_m(y) \sin \alpha_m x,$$

gdzie  $\alpha_m = m\pi/a$ .

Podobnie wyrażamy obciążenie zewnętrzne

$$(1.6) \quad q(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} q_m(y) \sin \alpha_m x,$$

gdzie

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \alpha_m x dx.$$

Po podstawieniu (1.5) i (1.6) do równania różniczkowego płyty o stałej sztywności  $D$

$$(1.7) \quad D \nabla^2 \nabla^2 W = q$$

otrzymujemy układ rozdzielonych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach (por. [4], s. 315). Całka tak otrzymanego równania jest postaci (por. [4], s. 323)

$$(1.8) \quad W_m(y) = A_m \operatorname{ch} \alpha_m y + B_m \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y + C_m \operatorname{sh} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y + W_{mq}(y),$$

gdzie  $A_m, B_m, C_m, D_m$  są stałymi całkowania,  $W_{mq}$  jest całką szczególną o postaci (por. [4], s. 315)

$$(1.9) \quad W_{mq}(y) = \int_0^y \frac{\alpha_m(y-t) \operatorname{ch} \alpha_m(y-t) - \operatorname{sh} \alpha_m(y-t)}{2\alpha_m^3 D} q_m(t) dt.$$

Do wyznaczenia mamy cztery nieznanne grupy stałych. Eliminujemy dwie z nich wykorzystując warunki brzegowe na brzegu swobodnie podpartym  $y = c$ , gdzie mamy:

$$(1.10) \quad W(x, c) = M_y(x, c) = 0.$$

Wykorzystanie powyższych warunków prowadzi do następującego wyrażenia na funkcję  $W(x, y)$ :

$$(1.11) \quad W(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m x}{\operatorname{ch} \theta_m} \left\{ D_m \left( \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m(c-y) - \theta_m \frac{\operatorname{ch} \alpha_m y}{\operatorname{ch} \theta_m} \right) - \right. \\ \left. - C_m \operatorname{sh} \alpha_m(c-y) + W_{mq}(y) \operatorname{ch} \theta_m - W_{mq}(c) \operatorname{ch} \alpha_m y - \frac{1}{2} \left( W_{mq}(c) - \frac{1}{\alpha_m^2} \frac{d^2 W_{mq}(c)}{dy^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \theta_m \frac{\operatorname{sh} \alpha_m(c-y)}{\operatorname{ch} \theta_m} + \alpha_m(c-y) \operatorname{sh} \alpha_m y \right) \right\},$$

gdzie

$$\theta_m = \alpha_m c = m\pi \frac{c}{a}.$$

Na całym obszarze płyty prostokątnej obowiązuje postać funkcji ugięcia płyty (1.11). Aby otrzymać kąt obrotu  $\varphi_y$ , moment zginający  $M_y$  oraz zastępczą siłę poprzeczną  $V_y$ , należy na funkcji ugięcia (1.11) wykonać znane operacje różniczkowe. Korzystając z oznaczeń (1.3) zapisujemy wyżej wymienione wielkości w następującej postaci:

$$(1.12) \quad \Phi_y^j(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \Omega_m^j(y) \sin \alpha_m x, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Omega_m^1(y) &= W_m(y), & \Omega_m^2(y) &= \frac{dW_m(y)}{dy}, \\ \Omega_m^3(y) &= D \left[ \nu \alpha_m^2 W_m(y) - \frac{d^2 W_m(y)}{dy^2} \right], \\ \Omega_m^4(y) &= D \left[ (2-\nu) \alpha_m^2 \frac{dW_m(y)}{dy} - \frac{d^3 W_m(y)}{dy^3} \right],\end{aligned}$$

$\nu$  — oznacza współczynnik Poissona.

Na osi  $x$  występują pewne wielkości geometryczne i statyczne. Wielkości te na całym brzegu płyty  $y = 0$  rozwijamy w pojedyncze sinusowe szeregi Fouriera o postaci

$$(1.13) \quad \Phi_y^j(x, 0) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} A_m^j \sin \alpha_m x, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie

$$A_m^j = \frac{2}{a} \int_0^a \Phi_y^j(x, 0) \sin \alpha_m x dx.$$

Wykorzystując zależności (1.4), wielkości  $A_m^j$  obliczamy z następujących równości:

$$(1.14) \quad A_m^j = R_m^j + S_m^j,$$

$$(1.15) \quad R_m^j = \frac{2}{a} \left\{ (-1)^{k_1+1+j} \int_0^c \Phi_x^j(c, c-x) \sin \alpha_m x dx + (-1)^{k_2} \int_c^a \Phi_x^j(c', x-c') \sin \alpha_m x dx \right\}.$$

$$(1.16) \quad S_m^j = \frac{2}{a} \int_c^{c'} \Phi_y^j(x, 0) \sin \alpha_m x dx,$$

$$j = 1, 2, 3, 4, \quad c' = a - c.$$

Występujące w (1.15) poszczególne wielkości geometryczne i statyczne  $\Phi_x^j$  otrzymujemy wykonując pewne operacje różniczkowe na funkcji ugięcia (1.11). Ogólnie można to zapisać następująco:

$$(1.17) \quad \Phi_x^j(x, y) = L^j[W(x, y)], \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie  $L^j$  oznaczają operatory różniczkowe o postaci

$$\begin{aligned}L^1 &= 1, & L^2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ L^3 &= -D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \\ L^4 &= -D \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right).\end{aligned}$$

Dla  $y = 0$  szeregi (1.12) i (1.13) przedstawiają tę samą funkcję, więc dla każdego  $j$  spełnione są następujące równości:

$$(1.18) \quad A_m^j = R_m^j + S_m^j = \Omega_m^j(0), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Każda z powyższych równości przedstawia nieskończony układ równań, ponieważ wielkości  $A_m^j$  dane są w postaci nieskończonych szeregów, w których pod znakiem sumy występują nieznanne stałe  $C_i$ ,  $D_i$  [por. (1.11), (1.15) i (1.17)].

Równości (1.18) będziemy kolejno nazywali:

- 1) dla  $j = 1$  — warunkiem brzegowym na ugięcie,
- 2) dla  $j = 2$  — warunkiem brzegowym na kąt obrotu,
- 3) dla  $j = 3$  — warunkiem brzegowym na moment zginający,
- 4) dla  $j = 4$  — warunkiem brzegowym na zastępczą siłę poprzeczną.

W przypadku gdy brzeg wewnętrzny nie doznaje ugięć lub obrotu, to na podstawie (1.16) mamy odpowiednio:

$$(1.19) \quad S_m^1 = 0, \quad S_m^2 = 0.$$

Jeżeli na brzeg wewnętrzny działają znane momenty  $M(x)$  dla  $c < x < c'$  lub znane obciążenie brzegowe  $p(x)$ , to wielkości  $S_m^3$  i  $S_m^4$  odpowiednio wynoszą:

$$(1.20) \quad S_m^3 = \frac{2}{a} \int_c^{c'} M(x) \sin \alpha_m x dx,$$

$$S_m^4 = \frac{2}{a} \int_c^{c'} p(x) \sin \alpha_m x dx.$$

W funkcji ugięcia (1.11) pozostają nieznanne dwie grupy stałych  $C_m$  i  $D_m$ . Stałe te wyznaczamy na podstawie (1.18), (1.19) i (1.20) z następujących nieskończonych układów równań:

- 1) dla płyty z otworem zamocowanym:

$$(1.21) \quad R_m^1 = \Omega_m^1(0), \quad R_m^2 = \Omega_m^2(0),$$

- 2) dla płyty z otworem swobodnie podpartym, obciążonym dodatkowo momentem zginającym  $M(x)$ :

$$(1.22) \quad R_m^1 = \Omega_m^1(0), \quad R_m^3 + \frac{2}{a} \int_c^{c'} M(x) \sin \alpha_m x dx = \Omega_m^3(0),$$

- 3) dla płyty z otworem zamocowanym przesuwnie, obciążonym dodatkowo obciążeniem brzegowym  $p(x)$ :

$$(1.23) \quad R_m^2 = \Omega_m^2(0), \quad R_m^4 + \frac{2}{a} \int_c^{c'} p(x) \sin \alpha_m x dx = \Omega_m^4(0),$$

4) dla płyty z otworem swobodnym, dodatkowo obciążonym momentem zginającym  $M(x)$  oraz obciążeniem brzegowym  $p(x)$ :

$$(1.24) \quad R_m^3 + \frac{2}{a} \int_c^{c'} M(x) \sin \alpha_m x dx = \Omega_m^3(0),$$

$$R_m^4 + \frac{2}{a} \int_c^{c'} p(x) \sin \alpha_m x dx = \Omega_m^4(0).$$

## 2. Schemat S-S

Rozpatrzmy teraz szczegółowo przypadek obciążenia symetrycznego względem wszystkich osi symetrii płyty. Niech na płycie pokazane na rys. 1 działa na całym obszarze płyty obciążenie  $q = \text{const}$ . Korzystając z rozważań podanych w punkcie pierwszym uzyskano następujące nieskończone układy równań dla poszczególnych warunków brzegowych:

1) warunek na ugięcie

$$(2.1) \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ C_i (a_{im} \sin \theta_i + \delta_{im} \text{th} \theta_i) + D_i \left( b_{im} \sin \theta_i + \frac{\theta_i}{\text{ch}^2 \theta_i} \delta_{im} \right) \right\} = Q_m^1;$$

2) warunek na kąt obrotu

$$(2.2) \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} i \{ C_i (a_{im} \cos \theta_i + \delta_{im}) + D_i (b_{im} \cos \theta_i + \delta_{im}) \} = Q_m^2;$$

3) warunek na moment zginający

$$(2.3) \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} i^2 \left\{ C_i (1-\nu) (a_{im} \sin \theta_i - \delta_{im} \text{th} \theta_i) + D_i \left[ \sin \theta_i ((1-\nu) b_{im} - 2\nu a_{im}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( 2 \text{th} \theta_i + (1-\nu) \frac{\theta_i}{\text{ch}^2 \theta_i} \right) \delta_{im} \right] \right\} = Q_m^3;$$

4) warunek na zastępczą siłę poprzeczną

$$(2.4) \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} i^3 \{ C_i (1-\nu) (a_{im} \cos \theta_i - \delta_{im}) + D_i [\cos \theta_i ((1-\nu) b_{im} + 2(2-\nu) a_{im}) + \\ + (1+\nu) \delta_{im}] \} = Q_m^4,$$

gdzie  $m = 1, 3, 5, \dots$

$\delta_{im}$  oznacza deltę Kroneckera,

$$\theta_i = i\pi\xi, \quad \xi = \frac{c}{a},$$

$$(2.5) \quad a_{im} = \frac{4}{\pi(i^2 + m^2)} (m \cos \theta_m \text{th} \theta_i - i \sin \theta_m),$$

$$b_{im} = \frac{4i}{\pi(i^2 + m^2)} \left[ \cos \theta_m \left( \frac{\theta_m}{\text{ch}^2 \theta_i} - \frac{2im}{i^2 + m^2} \text{th} \theta_i \right) + \frac{i^2 - m^2}{i^2 + m^2} \sin \theta_m \right],$$

$$\begin{aligned}
 Q_m^1 &= \frac{qa^4}{m\pi D} \left\{ 16 \cos \theta_m \left[ \frac{\xi}{96} (1 - \xi)(1 + \xi - \xi^2) - \frac{m^2}{\pi^5} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{f_{im}}{i^3} \sin \theta_i \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{(m\pi)^4} \left[ r_m + \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} (1 - 2\xi)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} (\theta_m - 2 \operatorname{th} \theta_m) \right] \right\}, \\
 Q_m^2 &= \frac{qa^4}{m\pi^2 D} \left\{ 16 \cos \theta_m \left[ \frac{1 - 2\xi}{96} (1 + 2\xi - 2\xi^2) - \frac{m^2}{\pi^4} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{f_{im}}{i^2} \cos \theta_i \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} (m\pi)^3} \left[ p_m - \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} (1 - 2\xi) \right] \right\}, \\
 (2.6) \quad Q_m^3 &= \frac{qa^4}{m\pi^3 D} \left\{ 16 \cos \theta_m \left[ \frac{\xi(1 - \xi)}{8} - \frac{m^2}{\pi^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (f_{im}(1 - \nu) + \nu g_{im}) \frac{\sin \theta_i}{i} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{(m\pi)^2} \left[ (1 - \nu) r_m + \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} (1 - 2\xi)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} ((1 - \nu) \theta_m + 2\nu \operatorname{th} \theta_m) \right] \right\}, \\
 Q_m^4 &= -\frac{qa^4}{m\pi^4 D} \left\{ 16 \cos \theta_m \left[ \frac{1 - 2\xi}{8} + \frac{m^2}{\pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (f_{im}(1 - \nu) - (2 - \nu) g_{im}) \cos \theta_i \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{m\pi \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \left[ (1 - \nu) p_m - (3 - \nu) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} (1 - 2\xi) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{im} &= \frac{1}{i^2(i^2 + m^2) \operatorname{ch} \theta_i}, \\
 f_{im} &= g_{im} \left( 1 + \frac{i^2}{i^2 + m^2} + \frac{\theta_i}{2} \operatorname{th} \theta_i \right), \\
 (2.7) \quad r_m &= \operatorname{sh} \theta_m \left( \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} - \frac{\theta_m}{\operatorname{ch}^2 \theta_m} \right), \\
 p_m &= \frac{m\pi}{2} \frac{\operatorname{ch} \theta_m}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} - \theta_m \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} (1 - 2\xi).
 \end{aligned}$$



Przy wyprowadzaniu wzorów na wyrazy wolne (2.6) wykorzystano następujące sumy szeregów:

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos i\pi\xi}{i^2} = \frac{\pi^2}{8}(1-2\xi), \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos i\pi\xi}{i^4} = \frac{\pi^4}{96}(1-2\xi)(1+2\xi-2\xi^2),$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos i\pi\xi}{i^2+m^2} = \frac{\pi}{4m} \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}},$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos i\pi\xi}{(i^2+m^2)^2} = \frac{\pi}{8m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \left( m\pi\xi \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi) + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi) - \frac{m\pi}{2} \frac{\operatorname{ch} m\pi\xi}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \right),$$

(2.8)

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin i\pi\xi}{i^3} = \frac{\pi^3}{8}\xi(1-\xi), \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin i\pi\xi}{i^5} = \frac{\pi^5}{96}\xi(1-\xi)(1+\xi-\xi^2),$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i \sin i\pi\xi}{(i^2+m^2)^2} = \frac{\pi^2}{16m \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \left( 2\xi \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi) + \operatorname{sh} m\pi\xi \right),$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin i\pi\xi}{i(i^2+m^2)^2} = \frac{\pi}{4m^4 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \left[ \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi) - \frac{m\pi}{4} \left( \frac{\operatorname{sh} m\pi\xi}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} + 2\xi \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi) \right) \right],$$

gdzie  $\xi = c/a$ ,  $0 \leq \xi \leq 1/2$ .

Dla płyt pokazanych na rys. 1 należy kolejno rozwiązać następujące układy dwóch nieskończonych układów równań:

- 1) dla płyt pokazanych na rys. 1a układy (2.1) i (2.2),
- 2) dla płyt pokazanych na rys. 1b układy (2.1) i (2.3);
- 3) dla płyt pokazanych na rys. 1c układy (2.2) i (2.4);
- 4) dla płyt pokazanych na rys. 1d układy (2.3) i (2.4).

## 3. Płyta pełna — przejście graniczne

Rozpatrzmy szczegółowo przypadki szczególne dla  $\xi = c/a = 1/2$  (tj. dla płyty pełnej) przy obciążeniu  $q = \text{const}$ . Przy  $\xi = 1/2$  dla wszystkich rozpatrywanych podparć brzegu wewnętrznego nieskończone układy równań (2.1), (2.2), (2.3) i (2.4) są układami jednorodnymi. Powyższe stwierdzamy na podstawie (2.6) i (2.7), gdzie dla  $\xi = 1/2$  mamy:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \cos \frac{m\pi}{2} = r_m = p_m = 0, \quad m = 1, 3, 5, \dots \\ Q_m^j = 0 \quad \text{dla } j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

**3.1. Płyta z brzegiem wewnętrznym utwierdzonym przesuwnie i brzegiem wewnętrznym swobodnym.** Dla takich płyt przy  $\xi = 1/2$  otrzymujemy następujące układy równań [por. (2.2), (2.3), (2.4) i (3.1)]:

1) dla brzegu wewnętrznego utwierdzonego przesuwnie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} C_m + D_m = 0, \\ -(1-\nu)C_m + (1+\nu)D_m = 0; \end{aligned}$$

2) dla brzegu wewnętrznego swobodnego

$$(3.3) \quad \begin{aligned} -C_m m^2 (1-\nu) \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} - D_m m^2 \left( 2 \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + (1-\nu) \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \right) - \\ - \frac{4(1-\nu)}{\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} C_i \frac{i^3 \sin \frac{i\pi}{2}}{i^2 + m^2} + \frac{4 \sin \frac{m\pi}{2}}{\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} D_i \frac{i^3 \sin \frac{i\pi}{2}}{i^2 + m^2} \times \\ \times \left( 2\nu + (1-\nu) \frac{i^2 - m^2}{i^2 + m^2} \right) = 0, \\ -(1-\nu)C_m + (1+\nu)D_m = 0. \end{aligned}$$

Łatwo jest wykazać, że jedynymi rozwiązaniami tych układów są stałe

$$(3.4) \quad C_m = D_m = 0.$$

Wstawiając powyższe do (1.11) dla  $W_{mq} = \frac{4qa^4}{D(m\pi)^5}$ , otrzymujemy znane rozwiązanie dla płyty pełnej zginanej stałym obciążeniem  $q = \text{const}$  (patrz [8] s. 118).

**3.2. Płyta z brzegiem wewnętrznym utwierdzonym i swobodnie podpartym.** Przypadek ten jest o wiele bardziej interesujący od poprzedniego, a to ze względu na to, że przy  $\xi \rightarrow 1/2$  brzeg wewnętrzny sprowadza się do punktu.

Na podstawie (2.1), (2.2), (2.3) i (3.1) przy  $\xi = 1/2$  otrzymujemy następujące układy równań:

1) dla brzegu wewnętrznego utwierdzonego

$$(3.5) \quad C_m \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + D_m \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} - \frac{4 \sin \frac{m\pi}{2}}{\pi} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} C_i \frac{i \sin \frac{i\pi}{2}}{i^2 + m^2} + \\ + \frac{4 \sin \frac{m\pi}{2}}{\pi} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} D_i \frac{i(i^2 - m^2) \sin \frac{i\pi}{2}}{(i^2 + m^2)^2} = 0, \\ C_m + D_m = 0;$$

2) dla brzegu wewnętrznego swobodnie podpartego

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \text{równania (3.5)}_1, \\ & \text{równania (3.3)}_1. \end{aligned}$$

Trywialnym rozwiązaniem układów (3.5) i (3.6) jest rozwiązanie (3.4), które odpowiada płycie pełnej niepodpartej wewnątrz obszaru płyty. Ponieważ w wyniku przejścia granicznego  $\xi \rightarrow 1/2$  powinniśmy uzyskać rozwiązanie dla płyty pełnej podpartej w środku punktowo, przeto muszą istnieć niezerowe rozwiązania układów równań (3.5) i (3.6). Istnienie takich niezerowych rozwiązań wykażemy bezpośrednim rachunkiem.

Z drugiej grupy równań układu (3.5) otrzymujemy zależność między stałymi  $C_m$  i  $D_m$  postaci:

$$C_m = -D_m.$$

Wstawiając powyższe do pierwszej grupy układu (3.5) oraz do układu (3.6) otrzymujemy następujące różne nieskończone układy równań:

$$(3.8) \quad C_m \left( \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} - \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \right) - \frac{8}{\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} C_i \frac{i^3 \sin \frac{i\pi}{2}}{(i^2 + m^2)^2} = 0,$$

$$(3.9) \quad C_m m^2 \left[ \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} + \nu \left( \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} - \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \right) \right] - \\ - \frac{8}{\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \left( \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} C_i \frac{i^5 \sin \frac{i\pi}{2}}{(i^2 + m^2)^2} + m^2 \nu \sum_{i=1,3,5}^{\infty} C_i \frac{i^3 \sin \frac{i\pi}{2}}{(i^2 + m^2)^2} \right) = 0.$$

Rozwiązania obu powyższych układów przewidujemy w postaci:

$$(3.10) \quad C_m = -D_m = A \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^3},$$

gdzie  $A$  jest dowolną stałą.

Wstawiając (3.10) do (3.8) i (3.9) kolejno otrzymujemy:

$$(3.11) \quad \frac{1}{m^3} \left( \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} - \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \right) - \frac{8}{\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(i^2 + m^2)^2} = 0,$$

$$(3.12) \quad \frac{1}{m} \left( \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \right) - \frac{8}{\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i^2}{(i^2 + m^2)^2} = 0.$$

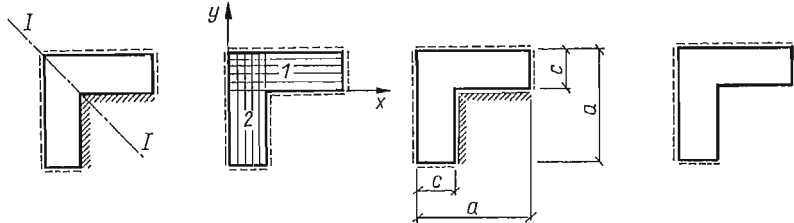
Jeżeli więc (3.10) jest rozwiązaniem układów (3.5) i (3.6) to muszą być spełnione równości (3.11) i (3.12). Na podstawie (2.8)<sub>3</sub> oraz (2.8)<sub>2</sub> stwierdzamy spełnienie powyższych równości. Rozwiązanie (3.10) ma prostą interpretację fizyczną. Jeżeli założymy, że  $q = 0$ , wtedy  $W_{mq} = 0$ , wstawiając teraz rozwiązanie (3.10) do (1.11) otrzymamy rozwiązanie dla płyty pełnej, obciążonej w środku siłą skupioną. W naszym przypadku przy  $q = \text{const}$  rozwiązanie dla  $\xi = 1/2$ , tj. dla płyty podpartej punktowo, otrzymamy wstawiając (3.10) do (1.11).

Stałą  $A$  wyznaczamy wtedy z warunku

$$W\left(\frac{a}{2}, 0\right) = 0.$$

#### 4. Płyty o innych kształtach i innych warunkach podparcia

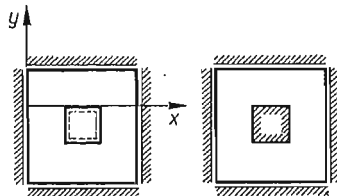
Sposobem opisanym w punkcie pierwszym można znajdować ugięcia dla płyt o nietypowych kształtach charakteryzujących się jedną osią symetrii (rys. 4).



Rys. 4

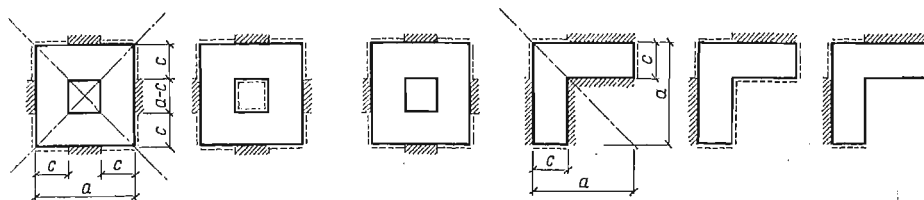
Przedstawiając funkcję ugięcia  $W(x, y)$  pojedynczym szeregiem kosinusowym o postaci:

$$W(x, y) = \sum_{m=0,1,2,\dots}^{\infty} W_m(y) \cos \alpha_m x,$$



Rys. 5

możemy otrzymać rozwiązania dla płyt pokazanych na rys. 5. Korzystając z rozważań danych w punkcie pierwszym przy wykorzystaniu tylko pierwszego z warunków (1.10), zagadnienie znajdowania ugięć płyt pokazanych na rys. 6 sprowadzić można do zagadnienia rozwiązania układu trzech nieskończonych układów równań.



Rys. 6

### 5. Przykłady liczbowe. Wnioski

Na podstawie rozważań danych w punktach 1 i 2 ułożono program na EMC «Odra» 1204 pozwalający na obliczanie wielkości geometrycznych i statycznych dla płyt pokazanych na rys. 1 poddanych zginaniu obciążeniem  $q = \text{const}$ .

W tablicach 2, 3, 4 i 5 zestawiono wartości ugięć, kątów obrotu i momentów zginających dla płyt z brzegiem wewnętrznym utwierdzonym oraz brzegiem swobodnym przy rozwiązaniu układu  $2 \times 50 = 100$  równań.

Przyjęto  $\xi = c/a = 0,250$ ,  $\nu = 0,3$ .

**5.1. Wnioski.** Poprawność rozwiązań stwierdzono na podstawie:

- 1) badania stabilności układu nieskończonych układów równań,
- 2) stopnia spełnienia warunków brzegowych dla  $y = 0$ ,
- 3) stopnia spełnienia symetrii względem osi I-I i II-II (rys. 1a) wielkości geometrycznych i statycznych.

Stabilność układu nieskończonych układów równań badano rozwiązując kolejno  $2 \times 5 = 10$ ,  $2 \times 10 = 20$ ,  $2 \times 20 = 40$ ,  $2 \times 50 = 100$  równań.

Większość uzyskanych rozwiązań jest stabilna, ale dla pewnych wartości współczynnika  $\xi$  w przypadku brzegu wewnętrznego utwierdzonego przesuwnie występuje niestabilność rozwiązań. Podobną numeryczną niestabilność rozwiązań zaobserwowano stosując metodę Levy'ego dla płyt o ciągłych warunkach brzegowych [9].

Wydaje się, że usunięcie pewnych niestabilności rozwiązań można uzyskać przez:

- 1) stosowanie EMC o dużej dokładności,
- 2) modyfikację układów (2.1)–(2.4) dla dużych wartości  $i$  oraz  $m$ ,
- 3) branie do rozwiązywanego układu równań większej liczby równań ze słabszego warunku brzegowego.

Stopień spełnienia warunków brzegowych zależy od danego warunku, współczynnika  $\xi$  i rozwiązywanej liczby równań. Ze wzrostem liczby równań wzrastał też stopień spełnienia danego warunku brzegowego i stopień spełnienia symetrii. Najlepiej spełnione są warunki geometryczne dla płyty z otworem utwierdzonym.

Tablica 2

Brzeg otworu utwierdzony $\xi = \frac{c}{a} = 0,250$					
1	2	3	4	5	6
$\frac{x}{a}$	$W(x, 0) \frac{D}{qa^4} 10^5$	$M_y(x, 0) \frac{D}{qa^2} 10^3$	$M_x(x, 0) \frac{D}{qa^2} 10^3$	$M_y(x, x) \frac{D}{qa^2} 10^3$	$M_x(x, x) \frac{D}{qa^2} 10^3$
0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{20}$	1,715	1,081	3,586	1,550	1,551
$\frac{2}{20}$	2,586	1,327	4,753	3,318	3,318
$\frac{3}{20}$	2,298	0,088	3,580	3,538	3,538
$\frac{4}{20}$	1,105	-2,633	-0,787	5,695	5,694
$\frac{5}{20}$	0,0078	-27,265	-18,654	-27,265	-18,654
$\frac{8}{20}$	0,0001	-7,970	-2,290		
$\frac{10}{20}$	0,00009	-7,926	-2,292		

Tablica 3

Brzeg otworu utwierdzony $\xi = 0,250$			
1	2	3	4
$\frac{y}{c}$	$W\left(\frac{a}{2}, y\right) \frac{D}{qa^4} 10^5$	$\varphi_y\left(\frac{a}{2}, y\right) \frac{D}{qa^3} 10^4$	$M_y\left(\frac{a}{2}, y\right) \frac{D}{qa^2} 10^3$
1	0	-3,254	0
$\frac{4}{5}$	1,457	-2,288	3,434
$\frac{3}{5}$	2,106	-0,229	4,360
$\frac{1}{2}$	2,030	0,818	3,884
$\frac{2}{5}$	1,713	1,667	2,786
$\frac{1}{5}$	0,674	2,153	-1,260
0	0,00009	-0,0045	-7,926

Tablica 4

Brzeg otworu swobodny $\xi = \frac{c}{a} = 0,250$					
1	2	3	4	5	6
$\frac{x}{a}$	$W(x, 0) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^3$	$M_y(x, 0) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^2$	$M_x(x, 0) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^2$	$M_y(x, x) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^2$	$M_x(x, x) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^2$
0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{20}$	0,282	0,399	0,514	0,204	0,204
$\frac{2}{20}$	0,554	0,714	0,804	0,529	0,530
$\frac{3}{20}$	0,810	0,913	0,904	0,806	0,808
$\frac{4}{20}$	1,049	0,999	0,804	0,921	0,925
$\frac{5}{20}$	1,274	0,386	0,737	0,386	0,737
$\frac{6}{20}$	1,478	-0,018	1,441		
$\frac{7}{20}$	1,644	0,010	1,621		
$\frac{8}{20}$	1,765	-0,008	1,735		
$\frac{9}{20}$	1,839	0,007	1,783		
$\frac{10}{20}$	1,864	-0,007	1,806		

Tablica 5

Brzeg otworu swobodny $\xi = 0,250$			
1	2	3	4
$\frac{y}{a}$	$W\left(\frac{a}{4}, y\right) \frac{D}{qa^4} \cdot 10^3$	$W\left(\frac{a}{2}, y\right) \frac{D}{qa^4} \cdot 10^3$	$M_y\left(\frac{a}{2}, y\right) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^3$
$\frac{5}{20}$	0	0	0
$\frac{4}{20}$	0,282	0,391	4,966
$\frac{3}{20}$	0,554	0,773	7,430
$\frac{5}{40}$	0,684	0,960	7,724
$\frac{2}{20}$	0,809	1,143	7,397
$\frac{1}{20}$	1,048	1,503	4,897
0	1,274	1,864	-0,067

Symetria wielkości geometrycznych i statycznych względem osi I-I i II-II zarysowała się już przy niewielkich układach równań. Dla układu  $2 \times 50 = 100$  równań, symetria jest wystarczająca (por. tablice 2, 3, 4, 5) dla ugięć — we wszystkich punktach, dla momentów  $M_x$  i  $M_y$  — wszędzie z wyjątkiem otoczenia naroża wewnętrznego.

Rozwiązując układy równań (2.1)–(2.4) dla  $\xi = 0,125, 0,250, 0,3333$ , stwierdzono, że im mniejsza wartość  $\xi$  tym nieskończone układy równań są bardziej stabilne, wzrasta stopień spełnienia warunków brzegowych i stopień spełnienia symetrii.

Ogólnie można stwierdzić, iż metoda podana w niniejszej pracy nadaje się do realizacji numerycznej oraz że wymaga dalszego badania na EMC o większej dokładności i większej pojemności pamięci operacyjnej od EMC «Odra» 1204.

Pragnę w tym miejscu podziękować mgrowi inż. A. CZECHOWSKIEMU za sprawdzenie szeregu przekształceń oraz za pomoc w wykonaniu pewnych obliczeń na EMC.

#### Literatura cytowana w tekście

1. G. N. SAWIN, *Spannungserhöhung am Rande von Löchern*, Berlin 1956.
2. W. NOWACKI, *Mechanika Budowli*, t. 3, Warszawa 1966.
3. Z. REIPERT, *Application of simple functional series to the solution of problems concerning statics, stability and vibration of plates having nontypical forms*, Arch. Mech. Stos., **15**, 6, 1963.
4. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*. Warszawa 1968.
5. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Warszawa 1972.
6. H. MIKOŁAJCZYK, J. GOŁAŚ, W. BUCZKOWSKI, *Analiza statyczna kwadratowej płyty z otworem podpartym wzdłuż obwodu koła*, Inż. i Bud. **28**, 7, 1971, 274–277.
7. Z. REIPERT, *Rozwiązania płyty prostokątnej z otworem prostokątnym metodą elementów podstawowych*, XVIII Konferencja Naukowa w Krynicy, 1972, Księga Konferencyjna.
8. S. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKI-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Warszawa 1962.
9. M. WOLPE, Z. PAŃKOWSKI, *Obliczenia płyt prostokątnych przy zastosowaniu maszyn cyfrowych*, Arch. Inż. Łąd., **16**, 4, 1970.

#### Р е з ю м е

#### ИЗГИБ КВАДРАТНОЙ ПЛИТЫ С ЦЕНТРАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМ КВАДРАТНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе дается формально точное решение задачи изгиба упругой квадратной плиты с центральным квадратным отверстием. Решение позволяет удовлетворить любым непрерывным краевым условиям по контуру отверстия для плиты свободно опирающейся по внешнему контуру (рис. 1). При использовании симметрии задача нахождения прогиба плиты с отверстием сведена к нахождению прогиба прямоугольной плиты с прерывными краевыми условиями (рис. 3). Применение одинарных рядов Фурье (1.5) сводит задачу к решению двух бесконечных систем уравнений.



## S u m m a r y

## BENDING OF A SQUARE PLATE WITH A CENTRALLY LOCATED SQUARE HOLE

The paper presents a formally accurate solution of the problem of bending of an elastic square plate with a central square hole. The solution makes it possible to account for arbitrary continuous boundary conditions along the edge of the hole under the assumption that the outer edge of the plate is simply supported (Fig. 1). Due to the symmetry of the problem, the problem of determination of the deflections of a plate with a hole is reduced to the problem of bending of a rectangular plate under discontinuous boundary conditions (Fig. 3). Using simple Fourier series (1.5), the problem is reduced to the solution of a system of two infinite sets of equations.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 listopada 1973 r.*

---