

ANALIZA SKOŃCZONYCH UGIĘĆ SŁABO WYPUKŁEJ MEMBRANY KULISTEJ OBCIĄŻONEJ LOKALNIE

WŁADYSŁAW PIECHOCKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Podstawowym zagadnieniem analizy naprężeń w powłokach cienkościennych jest wpływ zamocowania elementu przenoszącego obciążenie na konstrukcję. Obciążenie zewnętrzne może działać na małym elemencie powłoki albo na jej pewnej części. Można np. rozważać zagadnienie obciążeń normalnych lub stycznych działających na sztywny krążek zamocowany w powłoce; średnica krążka jest mała w porównaniu ze średnicą powłoki. Tego rodzaju problemy występują szczególnie w przypadku powłok bardzo wiotkich obciążonych lokalnie. Wiele prac poświęcono zagadnieniom powłok kulistych obciążonych ciśnieniem hydrostatycznym, ale zaledwie kilka zajmowało się analizą efektów spowodowanych siłami skupionymi.

Problem wyboczenia, jak wiadomo, ma duże znaczenie w przypadku powłok o skończonej sztywności zginania. Jednak w praktyce współczesnej coraz częściej występuje potrzeba rozpatrzenia zagadnień dotyczących powłok o prawie zerowej sztywności na zginanie. Typową tego rodzaju powłoką-membraną był sztuczny satelita amerykański ECHO 1, dla którego stosunek promienia do grubości wyrażał się liczbą 10^6 . W związku z konstrukcjami kosmicznymi typu ECHO 1 zachodzi konieczność zanalizowania wpływu obciążeń lokalnych wywołujących duże ugięcia powłok.

W pewnych przypadkach powłoka membranowa może być częściowo usztywniona wskutek ciśnienia wewnętrznego. Okazuje się, że w wielu konstrukcjach powłokowych efekty pochodzące od skończonych ugięć oraz nieliniowość charakteru membranowego odgrywają dominującą rolę. Jeśli uwzględnić np. zmianę grubości ścianki powłoki, to w miarę zmniejszania się grubości maleć będą naprężenia zginające i obciążenie zewnętrzne będzie przenoszone głównie przez siły charakteru membranowego. Należy więc poświęcić więcej uwagi zagadnieniom skończonych ugięć membran obciążonych lokalnie. W dalszych rozważaniach naszej pracy będziemy zakładać, że stosunek ugięcia do grubości powłoki nie musi być mały, chociaż względy natury wytrzymałościowej z konieczności ograniczają wielkość odkształceń, tak że założenie o małych odkształceniach pozostaje w mocy.

Zagadnieniem nieliniowych ugięć płaskiej membrany kolistej obciążonej lokalnie zajmował się po raz pierwszy SCHWERIN [1] w 1929 roku. To samo zagadnienie, ale na innej nieco drodze, ponownie rozpatrzył ALEKSIEJEW [2] w 1951 roku. Niestety, obydwa rozwiązania są słuszne tylko częściowo, mianowicie dla liczb Poissona $\nu < 1/3$; natomiast dla $\nu > 1/3$ tracą one sens. W 1962 roku zagadnieniem tym w związku z potrzebami praktyki zainteresowali się W. NACHBAR i W. PIECHOCKI. W pracy [3] przeprowadzili oni szczegółową analizę rozwiązania równania różniczkowego nieliniowego w zależności od warunków brzegowych jak i liczby Poissona. Podane ściśle rozwiązanie jest słuszne dla każdej wartości liczby Poissona. Otrzymane wyniki teoretyczne są zbieżne z danymi doświadczalnymi, które podają W. E. JAHSMAN, F. E. FRELD i A. M. C. HOLMES [4].

Autorowi nie są znane prace traktujące o membranach kulistych obciążonych lokalnie. Ze względu na duże znaczenie praktyczne tej problematyki w niniejszej pracy podjęto próbę przeprowadzenia analizy podobnej do tej, jaką przeprowadzono dla membrany płaskiej.

Sformułowanie zagadnienia. Będziemy rozważali zagadnienie otwartej membrany kulistej o małej wyniosłości z zamocowanym centralnie sztywnym krążkiem. Promień b krążka jest bardzo mały w stosunku do promienia a membrany (rys. 1). Siłą obciążającą membranę jest siła skupiona P , przyłożona do sztywnego krążka. Zakładamy, że przemieszczenie promieniowe u dla $r = b$ znika. Na brzegu zewnętrznym można przyjąć dowolne warunki wyrażone w przemieszczeniach lub naprężeniach. Symetryczne obciążenie normalne odkształci początkowo kulistą membranę na obrotowo-symetryczną konfigurację pozostającą w równowadze. Przyjmujemy, że membrana jest wykonana z materiału sprężystego, ugięcia oraz obroty elementu liniowego są skończone, odkształcenia są małe w stosunku do jedności oraz że związki fizyczne są liniowe. Analizę rozwiązania podano dla przypadku, gdy kąt ϑ charakteryzujący wypukłość membrany po odkształceniu jest tego samego rzędu co kąt θ , odpowiadający membranę przed odkształceniem. Naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia są funkcjami warunków brzegowych, siły skupionej P , liczby Poissona ν oraz parametru $\varepsilon = b/a$ (rys. 1).

Zależności geometryczne. Wyprowadzimy wzory na wielkości geometryczne dla membrany sferycznej przed i po odkształceniu. Zakładamy, że powierzchnia odkształcona jest również osiowo-symetryczna. Oznaczmy przez $\mathbf{R}$ wektor-promień zaczepiony w początku układu współrzędnych i skierowany do punktu P_0 membrany nieodkształconej. Mamy

$$(1.1) \quad \mathbf{R} = r(\theta) \cdot \mathbf{j}_r + z(\theta) \cdot \mathbf{k}$$

gdzie $\mathbf{j}_r$, $\mathbf{k}$ są wektorami jednostkowymi odpowiednio wzdłuż osi r i z . Natomiast r i z zależą od kąta θ oraz promienia krzywizny a następująco

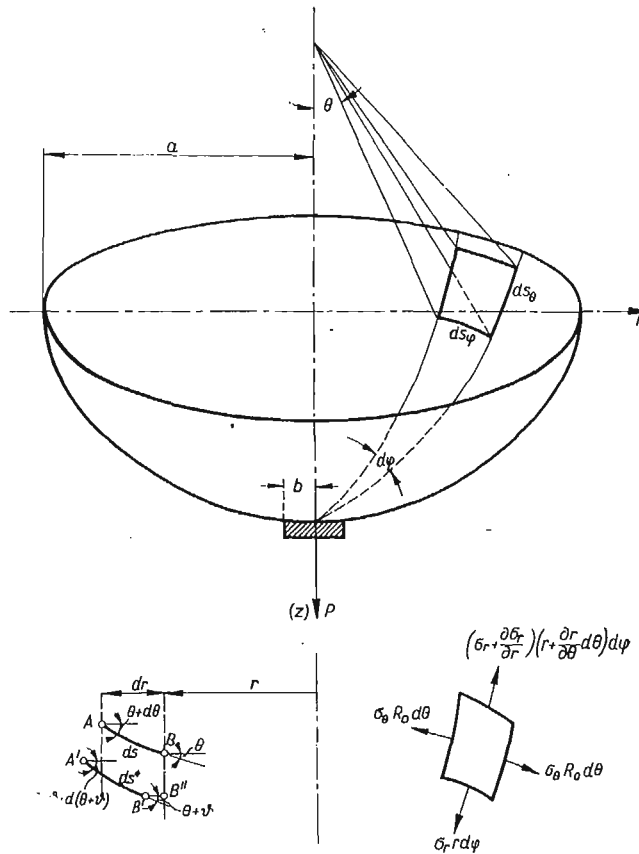
$$(1.2) \quad r = a \sin \theta, \quad z = a(1 - \cos \theta).$$

Obliczając różniczkę wektora $\mathbf{R}$ otrzymamy

$$(1.3) \quad d\mathbf{R} = \alpha \mathbf{j}_\theta d\theta + r \mathbf{j}_\varphi d\varphi,$$

gdzie $\mathbf{j}_\theta$, $\mathbf{j}_\varphi$ są odpowiednio wektorami jednostkowymi wzdłuż stycznej do południka oraz równoleżnika danej powierzchni. Współczynnik α wyraża się zależnością

$$(1.4) \quad \alpha^2 = r_{,\theta}^2 + z_{,\theta}^2, \quad (r_{,\theta}; z_{,\theta}) = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right).$$



Rys. 1

Element liniowy ds definiujemy jako

$$(1.5) \quad ds = [d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}]^{1/2}.$$

Tak więc dla $d\theta = 0$ otrzymamy

$$(1.6) \quad ds_\varphi = r d\varphi$$

i podobnie dla $d\varphi = 0$ mamy

$$(1.7) \quad ds_\theta = \alpha d\theta.$$

Nadając każdemu punktowi P_0 membrany nieodkształconej przemieszczenie symetryczne u w kierunku promienia r oraz w w kierunku osi z otrzymamy powierzchnię obrotowo-symetryczną membrany odkształconej. Wielkości odnoszące się do membrany odkształconej będziemy oznaczali gwiazdką. Tak więc punkt P_2 membrany nieodkształconej przejdzie w punkt P_0^* membrany odkształconej. Transformację tę zapisujemy symbolicznie

$$(1.8) \quad \begin{aligned} z &\rightarrow z+w = z^*, \\ r &\rightarrow r+u = r^*, \\ \theta &\rightarrow \theta+\vartheta = \theta^*. \end{aligned}$$

Zatem powyższa transformacja przenosi punkt materialny P o wektorze-promieniu $\mathbf{R}$ membrany nieodkształconej do punktu P^* membrany odkształconej o wektorze-promieniu $\mathbf{R}^*$. Ten ostatni zapisujemy w postaci

$$(1.9) \quad \mathbf{R}^* = (r+u)\mathbf{j}_r + (z+w)\mathbf{k}.$$

Postępując analogicznie jak dla wektora $\mathbf{R}$ otrzymamy

$$(1.10) \quad d\mathbf{R}^* = \alpha^* \mathbf{j}_\theta^* d\theta + r^* \mathbf{j}_\varphi^* d\varphi \quad \alpha^2 = r_{,\theta}^{*2} + z_{,\theta}^{*2}.$$

Odształcone elementy liniowe ds_θ^* i ds_φ^* występują w równaniu (1.10) jako współczynniki skalarowe przy odpowiednich wektorach jednostkowych.

Odształcenie definiujemy w postaci

$$(1.11) \quad \varepsilon = \frac{ds^* - ds}{ds} \quad \text{lub}^1 \quad (1 + \varepsilon)ds = ds^*.$$

Elementy liniowe ds^* otrzymamy ze wzoru (1.10), natomiast ds — ze wzoru (1.5) dla dowolnego kierunku w punkcie P .

Tak więc otrzymamy

$$(1.12) \quad \varepsilon_r = \left(1 + \frac{du}{dr}\right) - \frac{\cos \theta^*}{\cos \theta}$$

oraz

$$(1.13) \quad \varepsilon_\theta = \frac{r^*}{r} - 1.$$

Podstawiając do równania (1.12) pochodną du/dr obliczoną ze wzoru (1.13), otrzymamy równanie ciągłości w postaci następującej:

$$(1.14) \quad \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r + \frac{\cos \theta - \cos \theta^*}{\cos \theta} = 0.$$

¹ Definicja ta ma postać definicji dla wydłużeń E_j , wielkości charakterystycznej dla teorii odkształceń skończonych. Zależność między E_j i składową ε_j odkształcenia nieskończonego ma postać $E_j = \sqrt{1 + 2\varepsilon_j} - 1$. Dla małych odkształceń możemy więc przyjąć $E_j \approx \varepsilon_j$. Ponieważ zajmujemy się wyłącznie małymi odkształceniami (ale dużymi ugięciami), zatem E_j możemy zastąpić przez ε_j .

2. Równania równowagi

Dwie parami przekrojów południkowych i normalnych stożkowych wycinamy element membrany odkształconej. Przyjmujemy, że membrana jest obciążona tylko lokalnie, to znaczy, że działa na nią tylko siła skupiona, przyłożona do sztywnego krążka (rys. 1). Przez σ_r oznaczamy naprężenie normalne w przekrojach $r = \text{const}$, $r + dr = \text{const}$, a przez σ_θ — naprężenie normalne w przekrojach $\varphi = \text{const}$, $\varphi + d\varphi = \text{const}$.

Równanie rzutów sił na oś symetrii z przyjmuje postać

$$(2.1) \quad \frac{d}{d\theta} (R_0 h \sigma_r \sin \theta \sin \theta^*) = 0.$$

Korzystając z zależności $r = R_0 \sin \theta$ możemy przepisać równanie (2.1) następująco:

$$(2.2) \quad \frac{d}{dr} (hr \sigma_r \sin \theta^*) = 0.$$

Całkując równanie (2.2) otrzymamy

$$(2.3) \quad hr \sigma_r \sin \theta^* = \text{const} = C.$$

Aby wyjaśnić znaczenie stałej całkowania rozpatrzmy stan równowagi części środkowej membrany. Jediną siłą zewnętrzną działającą za pośrednictwem sztywnego krążka jest siła P . Jest ona zrównoważona przez wypadkową naprężeń normalnych w przekroju stożkowym. Powyższy warunek wyraża się zależnością

$$(2.4) \quad 2\pi hr \sigma_r \sin \theta^* = P.$$

Zatem z (2.3) oraz (2.4) mamy

$$(2.5) \quad C = \frac{P}{2\pi}.$$

Tak więc ostatecznie równanie (2.3) ma postać

$$(2.6) \quad \sigma_r \sin \theta^* = \frac{P}{2\pi hr}.$$

Drugie równanie równowagi otrzymamy rzutując wszystkie działające w przekroju siły na kierunek r . Składową naprężenia promieniowego jest wielkość

$$(2.7) \quad \frac{d}{d\theta} (hR_0 \sigma_r \sin \theta \sin \theta^*),$$

a składową naprężenia σ_θ jest

$$(2.8) \quad -hR_0 \sigma_\theta \cos \theta.$$

Sumując powyższe wielkości otrzymamy drugie równanie równowagi

$$(2.9) \quad \frac{d}{d\theta} (hR_0 \sigma_r \sin \theta \sin \theta^*) - hR_0 \sigma_\theta \cos \theta = 0.$$

Przechodząc do zmiennej niezależnej r możemy napisać

$$(2.10) \quad \frac{d}{dr} (hr\sigma_r \cos \theta^*) - h\sigma_\theta = 0.$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że $h = \text{const}$. Tak więc mamy

$$(2.11) \quad \sigma_r \sin \theta^* = \frac{P}{2\pi hr},$$

$$(2.12) \quad \frac{d}{dr} (r\sigma_r \cos \theta^*) = \sigma_\theta.$$

Jest to podstawowy układ równań opisujący równowagę membrany obciążonej siłą P skierowaną wzdłuż osi symetrii. Równania te wyprowadzono przy założeniu, że ugięcia mogą być dowolne, ale powierzchnia odkształcona pozostaje obrotowo-symetryczna.

3. Sprowadzenie układu równań (2.11), (2.12) oraz (1.14) do jednego równania drugiego rzędu

Obecnie zajmmy się wyprowadzeniem podstawowego równania nieliniowego opisującego stan równowagi membrany odkształconej. Przejście do wielkości bezwymiarowych uprości nam stronę rachunkową. W tym celu wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(3.1) \quad S_r = \frac{\sigma_r}{E}, \quad S_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E}, \quad \eta = \frac{P}{2\pi hbE}, \quad \psi = \frac{u}{a\epsilon\eta},$$

$$\epsilon = \frac{b}{a}, \quad \zeta = \frac{r}{a\epsilon\eta}, \quad \chi = \zeta \operatorname{ctg} \theta^*.$$

Zachodzi więc oczywisty związek

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{a\epsilon\eta} \frac{d}{d\zeta}.$$

Tak więc równania (2.11) i (2.12) przyjmują postać

$$(3.2) \quad \zeta S_r \sin \theta^* = 1,$$

$$(3.3) \quad \frac{d}{d\zeta} (\zeta S_r \cos \theta^*) = S_\theta.$$

Z prawa Hooke'a wiemy, że

$$(3.4) \quad S_\theta = \epsilon_\theta + \nu S_r.$$

Podstawiając w miejsce S_r odpowiednią wartość z równania (3.2) oraz wyrażając ϵ_θ przez funkcję ψ otrzymamy zależność

$$(3.5) \quad S_\theta = \frac{\psi}{\zeta} + \frac{\nu}{\zeta} \operatorname{cosec} \theta^*.$$

Podobnie otrzymamy związek

$$(3.6) \quad \varepsilon_r = \frac{1-\nu^2}{\zeta} \operatorname{cosec} \theta^* - \nu \frac{\psi}{\zeta}.$$

Możemy więc napisać

$$(3.7) \quad \frac{d}{d\zeta} (\operatorname{ctg} \theta^*) = \frac{1}{\zeta} (\psi + \nu \operatorname{cosec} \theta^*),$$

skąd

$$(3.8) \quad \psi = \zeta \frac{d}{d\zeta} (\operatorname{ctg} \theta^*) - \nu \operatorname{cosec} \theta^*$$

lub

$$(3.9) \quad \psi = \frac{d\chi}{d\zeta} - \frac{\chi}{\zeta} (1 + \nu \sec \theta^*).$$

Różniczkując powyższe równanie otrzymamy

$$(3.10) \quad \frac{d\psi}{d\zeta} = \frac{d^2\chi}{d\zeta^2} + \frac{\chi}{\zeta^2} (1 + \nu \sec \theta^*) - \frac{1}{\zeta} \frac{d\chi}{d\zeta} (1 + \nu \sec \theta^*) - \nu \frac{\chi}{\zeta} \frac{d(\sec \theta^*)}{d\zeta}.$$

Obecnie wrócimy do równania ciągłości (1.14). Korzystając z zależności (2.6) oraz (2.9) równanie (1.14) można przepisać w postaci

$$(3.11) \quad \frac{d^2\chi}{d\zeta^2} - [1 - \nu(1 - \sec \theta^*)] \frac{1}{\zeta} \frac{d\chi}{d\zeta} + \left[(1 - \nu)(1 + \nu \sec \theta^*) - \frac{\nu}{\zeta} \frac{d(\sec \theta^*)}{d\zeta} \right] \frac{\chi}{\zeta^2} - \frac{1 - \nu^2}{\zeta} \operatorname{cosec} \theta^* + 1 - \frac{\cos \theta^*}{\cos \theta} = 0$$

lub

$$(3.12) \quad \frac{d^2\chi}{d\zeta^2} - [1 - \nu(1 - \sec \theta^*)] \frac{1}{\zeta} \frac{d\chi}{d\zeta} + \left[(1 - \nu)(1 - \sec \theta^*) - \frac{\nu}{\zeta} \frac{d(\sec \theta^*)}{d\zeta} \right] \frac{\chi}{\zeta^2} + 1 - \sec \theta \sec^{-1} \theta^* = 0.$$

Wprowadźmy teraz następującą zmianę zmiennych

$$(3.13) \quad x = \left(\frac{r}{a} \right)^2 = (\varepsilon\eta)^2 \zeta^2, \quad y = 2^{2/3} (\varepsilon\eta)^{4/3} \chi;$$

wówczas mamy

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} = 2(\varepsilon\eta)^2 \frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} = 4(\varepsilon\eta)^2 x \frac{d^2}{dx^2} + 2(\varepsilon\eta)^2 \frac{d}{dx};$$

tak więc równanie (3.12) przyjmie postać

$$(3.14) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + \nu(1 - \sec \theta^*) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4} \left[(1 - \nu)(1 - \sec \theta^*) - 2(\varepsilon\eta)^2 \nu \frac{d(\sec \theta^*)}{dx} \right] \frac{y}{x} + (4\varepsilon\eta)^{-2/3} (1 - \sec \theta \sec^{-1} \theta^*) = 0.$$

Na podstawie (3.1) mamy

$$(3.15) \quad \sec \theta^* = (1 + \operatorname{ctg}^{-2} \theta^*)^{1/2} = \left[1 + \left(\frac{\xi}{\chi} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Podstawiając do powyższego wzoru funkcję χ ze związku (3.13) otrzymamy

$$(3.16) \quad \sec \theta^* = \left[1 + (4\varepsilon\eta)^{-2/3} \frac{x}{y^2} \right]^{1/2}.$$

Dotychczas nie zakładaliśmy nic o wielkości ugięć, a zatem równanie (3.14) jest równaniem nieuproszczonym. Ze względu na jego złożoność w dalszych rozważaniach będziemy zajmowali się równaniem uproszczonym. Założymy mianowicie, że kąty θ oraz ϑ są tego samego rzędu. W tym założeniu jest zawarta zasadnicza różnica między zwykłym, klasycznym postawieniem zagadnienia dla małych przemieszczeń, a zagadnieniem dla dużych ugięć, sformułowanym powyżej. Dla małych ugięć można przyjąć, że kąt ϑ obrotu łuku południka jest wielokrotnie mniejszy od kąta θ charakteryzującego wypukłość membrany. Tak więc równanie dla małych przemieszczeń możemy otrzymać z podanych tutaj wzorów przez pominięcie kąta ϑ w porównaniu z θ . W rozważanym przypadku ograniczymy się do takich ugięć, dla których zachodzi następująca nierówność:

$$(3.17) \quad (4\varepsilon\eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \ll 1.$$

Przy tym założeniu równanie (3.14) upraszcza się do postaci

$$(3.18) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y^2} - C \right) = 0,$$

gdzie

$$C = (4\varepsilon\eta)^{-2/3} \left(\frac{a}{R_0} \right)^2.$$

Jeśli krzywizna membrany równa jest zeru, wtedy mamy $C = 0$ i równanie (3.18) przechodzi w równanie dla ugięć skończonych dla membrany płaskiej [3].

4. Warunki brzegowe

Warunki, które nakładamy na funkcję y dla $x = \varepsilon^2$ oraz $x = 1$, formułujemy w zależności od rodzaju zamocowania. Na brzegu wewnętrznym, dla $x = \varepsilon^2$, przyjmujemy przemieszczenie $u = 0$. Na brzegu zewnętrznym natomiast ($x = 1$) możemy mieć dane niezależne od obciążenia zewnętrznego przemieszczenie promieniowe u_0 :

$$(4.1) \quad 2^{1/3} \cdot (\varepsilon\eta)^{2/3} \cdot \sqrt{x} \left[\frac{dy}{dx} - \frac{1 + \nu}{2} \frac{y}{x} \right] = \frac{u_0}{a}.$$

2. Jeżeli na brzegu są dane niezależne od obciążenia naprężenia promieniowe $s_r = s_r^0$, to zgodnie z (5.7) otrzymamy

$$(4.2) \quad 2^{1/3} \cdot (\varepsilon\eta)^{2/3} \cdot \frac{y}{2x} = S_r^0.$$

3. Może wystąpić również kombinacja naprężenia promieniowego i odkształcenia ε_θ . Na przykład, jeśli membrana bez wstępnego naprężenia jest połączona na brzegu zewnętrznym ze sprężystym pierścieniem o sztywności k , to otrzymujemy

$$(4.3) \quad hS_r + k\varepsilon_\theta = 0,$$

czyli

$$(4.4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \left(1 + \nu - \frac{h}{k} \right).$$

4. Membrana jest połączona ze sprężystym pierścieniem z naprężeniem wstępnym, które może być wyrażone przez naprężenie początkowe s_r^0 albo przez początkowe przemieszczenia u_0 . Dla $x = 1$ powinno wtedy być

$$(4.5) \quad hS_r + k\varepsilon_\theta = hS_r^0 \quad \text{lub} \quad \varepsilon_\theta + \frac{hS_r}{k} = \frac{u_0}{a}.$$

Korzystając ze wzorów (5.4), (5.7) i (5.8) możemy napisać

$$(4.6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \left(1 + \nu - \frac{h}{k} \right) - \frac{hS_r^0}{k} \cdot 2^{-1/3} \cdot (\varepsilon\eta)^{-2/3}$$

lub

$$(4.7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \left(1 + \nu - \frac{h}{k} \right) - \frac{u_0}{a} \cdot 2^{-1/3} \cdot (\varepsilon\eta)^{-2/3}.$$

Oczywiście możliwe są jeszcze inne warunki brzegowe. W dalszym ciągu zajmujemy się szczegółowo warunkami typu (4.1).

W danym przypadku mamy następujące warunki dla funkcji rozwiązującej

$$(4.8) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{1+\nu}{2} \frac{y}{x} = \mu \quad \text{dla } x = 1;$$

$$(4.9) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{1+\nu}{2} \frac{y}{x} = 0 \quad \text{dla } x = \varepsilon^2,$$

gdzie $\mu = 2^{-1/3} (\varepsilon\eta)^{-2/3} \frac{\mu_0}{a}$.

Korzystając z równania (6.6) możemy napisać powyższe zależności w równoważnej postaci

$$(4.10) \quad \sqrt{y_1^{-1} + Cy_1 + C_0} = \mu + \frac{1+\nu}{2} y_1, \quad y_1 \equiv y(1),$$

$$(4.11) \quad \varepsilon^2 \sqrt{y_\varepsilon^{-1} + Cy_\varepsilon + C_0} = \frac{1+\nu}{2} y_\varepsilon, \quad y_\varepsilon \equiv y(\varepsilon^2).$$

Stałą całkowania C_0 wyznaczamy z równania przestępnego

$$(4.12) \quad 1 - \varepsilon^2 = \int_{h(\varepsilon, \nu; C_0)}^{g(\mu, \nu; C_0)} [y^{-1}(\xi) + Cy(\xi) + C_0] d\xi \equiv J(C_0),$$

gdzie $J(C_0) > 0$, $g(\mu, \nu; C_0)$ jest pierwiastkiem rzeczywistym dodatnim równania (4.10), a $h(\varepsilon, \nu; C_0)$ — pierwiastkiem rzeczywistym dodatnim równania (4.11). W przypadku warunków brzegowych wyrażonych w naprężeniach należy przyjąć we wzorze (4.13) zamiast $g(\mu, \nu; C_0)$ wielkość s_r^0 ze wzoru (4.12). Dolna granica (4.13) pozostaje niezmieniona. Istnienie tylko jednego dodatniego pierwiastka równania (4.10) i odpowiednio (4.11) wykażemy w p. 7.

5. Przeszacowania, odkształcenia i naprężenia wyrażone przez funkcję rozwiązującą F

Korzystamy z liniowego prawa Hooke'a dla ciała izotropowego i jednorodnego

$$(5.1) \quad \varepsilon_r = S_r - \nu S_\theta, \quad \varepsilon_\theta = S_\theta - \nu S_r,$$

gdzie ν jest współczynnikiem Poissona. Stosując zależność

$$(5.2) \quad \varepsilon_\theta = \frac{\psi}{\xi},$$

otrzymany po podstawieniu w miejsce ψ funkcji χ związek

$$(5.3) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{\xi} \frac{d\chi}{d\xi} - \frac{\chi}{\xi^2} (1 + \nu \sec \theta^*).$$

Wyrażając następnie χ przez funkcję y otrzymamy ostatecznie

$$(5.4) \quad \varepsilon_\theta = 2^{1/3} (\varepsilon \eta)^{2/3} \left\{ \frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} \left[1 + \nu \left(1 + (4\varepsilon \eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \right)^{1/2} \right] \right\}.$$

Postępując podobnie ze wzorem (3.6) otrzymamy

$$(5.5) \quad S_\theta = 2^{1/3} (\varepsilon \eta)^{2/3} \left[\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} \left(1 + (4\varepsilon \eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \right)^{1/2} \right].$$

Analogicznie dla naprężeń mamy zależności

$$(5.6) \quad S_\theta = 2^{1/3} (\varepsilon \eta)^{2/3} \left[\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} \left(1 + (4\varepsilon \eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \right)^{1/2} \right],$$

i

$$(5.7) \quad S_r = 2^{1/3} (\varepsilon \eta)^{2/3} \frac{y}{x} \left(1 + (4\varepsilon \eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \right)^{1/2}$$

Dla przemieszczenia u wyrażonego przez funkcję rozwiązującą y mamy wzór następujący

$$(5.8) \quad u = r \varepsilon_\theta = (a \varepsilon \eta) \psi = 2^{1/3} (\varepsilon \eta)^{2/3} a \sqrt{x} \left\{ \frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} \left[1 + \nu \left(1 + (4\varepsilon \eta)^{2/3} \frac{x}{y^2} \right)^{1/2} \right] \right\}.$$

Kształt membrany jest określony równaniem

$$(5.9) \quad \frac{dw}{dr} = -\operatorname{tg} \theta^*,$$

a na podstawie wzoru (3.1) i (3.13) mamy

$$(5.10) \quad \operatorname{tg} \theta^* = 2^{2/3} (\varepsilon \eta)^{1/3} \frac{x^{1/2}}{y},$$

tak więc

$$(5.11) \quad w(r) = -2^{1/3} (\varepsilon \eta)^{1/2} \int_b^r \frac{\sqrt{x}}{y} dr + w_d,$$

gdzie w_d jest maksymalnym wychyleniem tarczy zamocowanej w membranie. Jeśli w całce (5.11) wprowadzić zmienną x zamiast r , to otrzymamy

$$(5.12) \quad w(x) = -2^{-1/3} (\varepsilon \eta)^{1/3} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{y(\xi)} + w_d \quad \text{dla } x_0 \leq x < 1,$$

gdzie $x_0 = (b/a)^2$.

6. Całkowanie równania równowagi (3.18)

Mnożąc równanie

$$(6.1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y^2} - C \right) = 0$$

przez dy/dx , otrzymamy

$$(6.2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{C}{2} \frac{dy}{dx}$$

lub

$$(6.3) \quad \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y} \right) = C \frac{dy}{dx}.$$

Całkując jednokrotnie to ostatnie równanie otrzymamy

$$(6.4) \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{1}{y} = Cy + C_0,$$

gdzie C_0 jest dowolną stałą całkowania, którą wyznaczymy z warunków brzegowych. Otrzymaliśmy więc równanie pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych

$$(6.5) \quad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{y^{-1} + Cy + C_0}.$$

Wykażemy, że z dwóch znaków przed pierwiastkiem należy uwzględnić tylko znak dodatni. Z fizycznej określoności membrany wynika, że $\sigma_0 \geq 0$,

$\alpha_r \geq 0$, a na podstawie wzorów (5.6) i (5.7) wnioskujemy, że $y(x) > 0$ oraz $dy/dx > 0$ dla $\varepsilon^2 < x < 1$. Pozostaje nam zatem tylko równanie

$$(6.6) \quad \frac{dy}{dx} = +\sqrt{y^{-1} + Cy + C_0}.$$

Biorąc pod uwagę, że naprężenia mogą przyjmować tylko wartości rzeczywiste mamy ponadto nierówność

$$(6.7) \quad y^2 + cy + d > 0 \quad \text{dla} \quad \varepsilon^2 \leq x \leq 1,$$

gdzie $c = C_0/C$, $d = 1/C$. Ze wzorów (5.7) oraz (6.6) wynika, że funkcja $y(x)$ jest monotoniczna rosnąca w przedziale zamkniętym $\varepsilon^2 \leq x \leq 1$. Ponadto na podstawie założenia o małych odkształceniach wiemy, że naprężenia główne nie mogą rosnąć nieograniczenie. Tak więc funkcja $y(x)$ spełnia następującą nierówność:

$$(6.8) \quad 0 < y(x) < \infty \quad \text{dla} \quad \varepsilon^2 < x < 1,$$

$$(6.9) \quad 0 < \frac{dy}{dx} < \infty \quad \text{dla} \quad \varepsilon^2 < x < 1.$$

Znak silnej nierówności po lewej stronie we wzorze (6.8) wynika z warunku $s_r > 0$ dla $\varepsilon^2 < x < 1$. Natomiast słuszność nierówności po lewej stronie w (6.9) wynika z tego, że

$$(6.10) \quad \frac{dy}{dx} \geq \frac{y}{2x} > 0,$$

co jest równoznaczne z żądaniem, aby $s_0 \geq 0$.

Pisząc równanie (6.6) w postaci

$$(6.11) \quad dx = \frac{dy}{(y^{-1} + Cy + C_0)^{1/2}}$$

i następnie całkując je w granicach od ε^2 do x otrzymamy

$$(6.12) \quad x - \varepsilon^2 = \int_{y(\varepsilon^2)}^{y(x)} (\eta^{-1} + C\eta + C_0)^{-1/2} d\eta \quad \text{dla} \quad \varepsilon^2 \leq x \leq 1,$$

gdzie $y(\varepsilon^2) = h(\varepsilon, \nu; C_0)$. Przyjmując $x = 1$ otrzymamy równanie (4.14).

Całka (6.12) jest całką eliptyczną w postaci Legendre'a. Można ją wyrazić przez funkcję eliptyczną $y(x)$, jednak ze względów rachunkowych — napisanie programu dla maszyny cyfrowej nie przedstawia większych trudności w przypadku operatora całkowego — pozostawimy rozwiązanie w postaci (6.12).

7. Jednoznaczność rozwiązania

Niejednoznaczność rozwiązania tkwi w równaniach (4.8) i (4.9). Są to równania trzeciego stopnia i jako takie mogą mieć więcej niż po jednym pierwiastku

rzeczywistym dodatnim. W rozważanym przypadku równanie (4.9) możemy napisać w postaci

$$(7.1) \quad y_\varepsilon^3 - \bar{c}^2 C y_\varepsilon^2 - \bar{c}^2 C_0 y_\varepsilon - \bar{c}^2 = 0,$$

gdzie

$$\bar{c}^2 = \left(\frac{2\varepsilon^2}{1+\nu} \right)^2 > 0.$$

Dowód istnienia tylko jednego rzeczywistego dodatniego pierwiastka równania (1.7) w przedziale $-A \leq C_0 < +\infty$, gdzie

$$A = 2 \left(\frac{\bar{c} \cdot C}{3} \right)^2 + \frac{3}{\bar{c}^2 C},$$

wynika natychmiast z reguły Kartezjusza. Natomiast dla $C_0 < A$ nie istnieje pierwiastek rzeczywisty dodatni.

Literatura cytowana w tekście

- [1] E. SCHWERIN, *Über Spannungen und Formänderung Kreisringformigen Membranen*, Z. Tech. Phys., 12, 1929.
- [2] С.А. АЛЕКСЕЕВ *Кольцеобразная упругая мембрана под действием поперечной силы, приложенной к жесткому центрально расположенному диску*, Инженерный Сборник, 10. (1951).
- [3] W. NACHBAR, W. PIECHOCKI, *Analysis of large deflections of a flat circular membrane*, J. Appl. Mech., w druku.
- [4] W. E. JASHMAN, F. E. FIELD, A. M. C. HOLMES, *Finite deformations in a prestressed, centrally loaded, circular elastic membrane*, Technical report: Mathematics, Lockheed, Missiles and Space Division, 1962.
- [5] Р.Г. СУРКИН, *К теории устойчивости и прочности сферических и эллипсоидальных оболочек, днищ и мембран*, Дисс., физ.-техн. ин-т, Казань 1952.

Резюме

АНАЛИЗ КОНЕЧНЫХ ПРОГИБОВ ПОЛОГОЙ ЛОКАЛЬНО ЗАГРУЖЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЫ

В сферической пологой оболочке закреплен жесткий кружок. На наружном краю даются перемещения или напряжения. Сосредоточенные силы, действующие симметрически на жесткий кружок, изменяют форму, деформируют рассматриваемую мембрану с начального сферического, состояния придавая ей вращательно-симметричную конфигурацию. Мембрана изготовлена из изотропного материала. Предполагаются, конечные прогибы и обороты, тогда как физические зависимости являются линейными.

В работе рассматриваются, для умеренных оборотов, прогибы и напряжения как функции краевых значений, центральной нагрузки, числа Пуассона и отношение радиусов мембраны.

FINITE DEFLECTIONS OF SHALLOW SPHERICAL MEMBRANE
LOCALLY LOADED

A shallow spherical annular membrane is attached to a rigid central plug. At the outer edge displacement or stresses are given. Normal load applied symmetrically to the central disc deflects the membrane out of its initial spherical state into a rotationally symmetric equilibrium configuration. A stiff elastic material is assumed, so that finite deflections and finite rotations of linear elements are obtained with small strains and with the linear, isotropic stress-strain relations. The present paper investigates, for moderate rotations, the membrane displacement and stresses as functions of the boundary conditions, the central load, Poisson's ratio, and the radius ratio, and the ratio of the inner to the outer membrane radius.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 stycznia 1964 r.
