

DYNAMICZNE ZAGADNIENIA TERMOSPŘĘŻYSTOŚCI

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Doświadczenie uczy, że odkształcenie ciała związane jest ze zmianą zawartości w nim ciepła. Zmienne w czasie obciążenie ciała wywołuje w nim nie tylko przemieszczenia, ale i zmienny w czasie rozkład temperatury. Odwrotnie, ogrzanie ciała powoduje w nim odkształcenie i zmianę temperatury. Ruch ciała charakteryzowany jest przez wzajemne oddziaływanie na siebie pola odkształcenia i pola temperatury. Dziedzinę, zajmującą się wzajemnym oddziaływaniem tych pól, nazywamy *termosprężystością*.

Sprężenie tych dwu pól powoduje, że w równaniach przemieszczeniowych ruchu pojawiają się człony temperaturowe, w równaniu przewodnictwa cieplnego człony deformacyjne.

Sprężenie pola deformacji i temperatury postulował już J. M. C. DUHAMEL [1], twórca teorii naprężeń cieplnych, wprowadzając do równania przewodnictwa cieplnego człon dylatacyjny. Jednak równanie to nie zostało uzasadnione na drodze termodynamicznej. Próbę uzasadnienia termodynamicznego tego równania podjęli później W. VOIGT [2] i H. JEFFREYS [3]. Jednak dopiero w 1956 r. M. A. BIOT [4] podał pełne uzasadnienie równania przewodnictwa cieplnego w oparciu o termodynamikę procesów nieodwracalnych [5]. M. A. BIOT podał również podstawowe metody rozwiązywania równań termosprężystości jak też i twierdzenie wariacyjne.

Termosprężystość opisuje szeroką kategorię zjawisk, jest uogólnieniem klasycznej teorii sprężystości oraz teorii przewodnictwa cieplnego. Obecnie termosprężystość jest dziedziną w pełni ukształtowaną. Zostały sformułowane podstawowe zależności i równania różniczkowe. Opracowano szereg metod rozwiązywania równań termosprężystości, uzyskano podstawowe twierdzenia energetyczne i wariacyjne. Rozwiązano też szereg zagadnień dotyczących rozprzestrzeniania się fal termosprężystych.

Jak wiadomo, badania w dziedzinie termosprężystości poprzedzone były rozległymi badaniami w ramach tak zwanej *teorii naprężeń cieplnych* (Theorie der Wärmespannungen, theory of thermal stresses). Pod tą nazwą rozumiemy badanie odkształceń i naprężeń, wywołanych ogrzaniem ciała, przy przyjęciu upraszczającego założenia, że na przewodnictwo cieplne nie ma wpływu odkształcenie ciała sprężystego.

W teorii tej, sięgającej początków teorii sprężystości i intensywnie rozwijanej w ostatnich latach ze względu na jej rosnące znaczenie praktyczne, posłużono się

klasycznym równaniem przewodnictwa cieplnego, nie zawierającym członu związanego z odkształceniem ciała.

Równolegle z teorią naprężeń cieplnych rozwinęła się *elastokinetyka* również przy założeniu upraszczającym, postulującym, że wymiana ciepła pomiędzy częściami ciała, odbywająca się za pośrednictwem przewodnictwa cieplnego, zachodzi tak wolno, że ruch traktować można jako adiabatyczny.

Wymienione tu dziedziny stanowią obecnie przypadki szczególne teorii ogólniejszej, termosprężystości. W ogólnych twierdzeniach i metodach termosprężystości mieszczą się jako przypadki szczególne twierdzenia i metody teorii przewodnictwa cieplnego i klasycznej teorii sprężystości.

Zauważyć należy, że rozwiązania uzyskane w ramach termosprężystości niewiele odbiegają od rozwiązań klasycznej teorii sprężystości czy też teorii przewodnictwa cieplnego. Sprężenie pola odkształcenia i temperatury jest słabe. Jednakże różnice jakościowe są zasadnicze. Widać to choćby na przykładach fal sprężystych, które w ramach termosprężystości są tłumione i ulegają dyspersji, podczas gdy w ramach elastokinetyki występują jedynie fale nietłumione. Podstawowego znaczenia nabiera termosprężystość w tych przypadkach, w których głównym celem jest badanie sprężystej dyssypacji. Znaczenie termosprężystości polega głównie na walorach poznawczych i uogólniających tej teorii.

W niniejszym referacie przeglądowym punkt ciężkości przeniesiono na przedstawienie podstawy termodynamicznych teorii, na równania różniczkowe termosprężystości i ważniejsze metody ich rozwiązania oraz na ogólne twierdzenia energetyczne i wariacyjne.

Mniej uwagi poświęcono rozwiązaniom konkretnych problemów odsyłając czytelnika do źródłowej literatury, umieszczonej na końcu pracy. Przy podawaniu związków funkcyjnych i równań stosować będziemy zapis tensorowy indeksowy w kartezjańskim układzie współrzędnych.

2. Podstawowe założenia i związki liniowej termosprężystości

W rozważaniach zawartych w niniejszym punkcie zajmować się będziemy jednorodnymi anizotropowymi ciałami sprężystymi. Dla tych ciał wyprowadzimy ogólne związki i równania rozszerzone przewodnictwa cieplnego, a dopiero później przejdziemy do ciała jednorodnego izotropowego, którym zajmować będziemy się w następnych punktach pracy.

Niech ciało w stanie nieodkształconym i beznapięciowym (przy niewystępowaniu sił zewnętrznych) znajduje się w temperaturze T_0 . Ten stan wyjściowy nazwiemy stanem naturalnym ciała, przyjmując, że entropia dla tego stanu jest równa zeru. Wskutek działania obciążeń zewnętrznych, a więc sił masowych i powierzchniowych, dalej wskutek działania źródeł ciepła oraz ogrzania (względnie oziębienia) powierzchni ciała, ośrodek dozna odkształcenia i zmiany temperatury. W ciele powstaną przemieszczenia u , a zmiana temperatury wyniesie $\theta = T - T_0$, gdzie T jest temperaturą bezwzględną punktu x ciała. Zmianie temperatury towarzyszy powstanie odkształceń ε_{ij} i naprężeń σ_{ij} . Wymienione tu wielkości u , θ , ε_{ij} , σ_{ij} są funkcjami miejsca x i czasu t .

Zakładamy, że zmiana temperatury $\theta = T - T_0$ towarzysząca odkształceniu jest mała oraz że wzrost temperatury θ nie powoduje istotnych zmian we współczynnikach materiałowych tak sprężystych jak i termicznych. Współczynniki te będziemy traktować jako niezależne od T .

Do uczynionego założenia $|\theta/T_0| \ll 1$ dodajmy następne, dotyczące małych odkształceń. Zakładamy mianowicie, że kwadraty i iloczyny składowych odkształceń można pominąć w stosunku do odkształceń ε_{ij} . W ten sposób dalsze rozważania ograniczamy do termosprężystości geometrycznie liniowej. Zależność między odkształceniami i przemieszczeniami ogranicza się do związku liniowego

$$(2.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Odształcenia, jak wiadomo, nie mogą być funkcjami dowolnymi, spełniać muszą sześć związków, tak zwanych związków geometrycznej nierozdzielności,

$$(2.2) \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Podstawowym zadaniem staje się uzyskanie równań stanu, wiążących składowe tensora naprężenia σ_{ij} ze składowymi tensora odkształcenia ε_{ij} i temperatury θ .

Zauważmy, że stan mechaniczny i termiczny ośrodka jest w danej chwili w sposób zupełny opisany przez rozkład odkształceń ε_{ij} i temperatury θ . Stąd wnioskujemy, że przy izotermicznej zmianie stanu ($T = T_0$) mamy do czynienia z procesem sprężystym i termodynamicznie odwracalnym. W przemianach jednak, w których występują zmiany temperatury, mamy do czynienia z dwoma zalegającymi się procesami, odwracalnym procesem sprężystym i nieodwracalnym procesem termodynamicznym. Ten ostatni wywołany jest przez samorzutny, a więc nieodwracalny proces przenoszenia ciepła za pomocą przewodnictwa cieplnego.

Zaburzeń termosprężystych nie da się tu opisać za pomocą klasycznej termodynamiki, korzystać trzeba ze związków termodynamiki procesów nieodwracalnych [5, 6].

Dla uzyskania równań stanu należy rozpatrzyć energię układu. Wyjdziemy ze związku różniczkowego wywodzącego się z pierwszej zasady termodynamiki

$$(2.3) \quad du = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + dQ.$$

Związek ten wykazuje, że mała zmiana du energii wewnętrznej równa się sumie pracy odkształcenia oraz przyrostu ilości ciepła, wprowadzonego do rozpatrywanej nieskończenie małej objętości ciała. Zmiana ilości ciepła równa się Tds , gdzie s jest entropią, tak że równanie (2.3) przyjmuje postać

$$(2.3') \quad du = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + Tds.$$

Dodać należy, że przyrost energii wewnętrznej u jest różniczką zupełną. Zmiennymi niezależnymi w związku (2.3') są odkształcenia ε_{ij} i entropia s , tak że $u \equiv u(\varepsilon_{ij}, s)$.

Zamiast funkcji u wygodniej będzie wprowadzić energię swobodną $f = u - sT$, funkcję zmiennych ε_{ij} i T :

$$(2.4) \quad df = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - s dT.$$

Również i df jest różniczką zupełną.

Związki (2.3') i (2.4) zezwalają na wyznaczenie naprężeń σ_{ij} jako funkcji zmiennych niezależnych ε_{ij} i s względnie ε_{ij} i T . Zważywszy, że

$$(2.5) \quad du = \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_s d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_\varepsilon ds,$$

$$(2.6) \quad df = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_\varepsilon dT,$$

otrzymamy z porównania równań (2.3') i (2.5) oraz (2.4) i (2.6) następujące zależności:

$$(2.7) \quad \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_s, \quad T = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_\varepsilon, \quad \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T, \quad s = - \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_\varepsilon.$$

W dalszych rozważaniach wykorzystamy trzecie z równań (2.7), dążąc do przedstawienia naprężeń σ_{ij} jako funkcji odkształceń ε_{ij} i T .

Rozwińmy funkcję $f(\varepsilon_{ij}, T)$ w szereg nieskończony w otoczeniu stanu naturalnego $f(0, T_0)$:

$$(2.8) \quad f(\varepsilon_{ij}, T) = f(0, T_0) + \frac{\partial f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial f(0, T_0)}{\partial T} (T - T_0) + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2 \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \varepsilon_{ij} (T - T_0) + \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial T^2} (T - T_0)^2 \right] + \dots$$

Z rozwinięcia $f(\varepsilon_{ij}, T)$ zatrzymamy człony liniowe i kwadratowe ograniczając się jedynie do liniowych związków między naprężeniami σ_{ij} , odkształceniami ε_{ij} i zmianą temperatury θ .

Zważywszy, że dla $\varepsilon_{ij} = 0, T = T_0$ mamy do czynienia ze stanem naturalnym, przyjąć można, że $f(0, T_0) = 0$. Do zera przyrównamy również człon $\partial f(0, T_0)/\partial T$. Z porównania bowiem równań (2.4) i (2.6) wynika, że $(\partial f/\partial T)_\varepsilon = -s$, a zatem dla stanu naturalnego jest

$$\frac{\partial f(0, T_0)}{\partial T} = -s(0, T_0) = 0.$$

Wykorzystajmy teraz trzeci ze związków (2.7)

$$(2.9) \quad \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, T) = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = \frac{\partial f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} (T - T_0).$$

Otrzymaliśmy zatem związek liniowy dla małych odkształceń, związek zgodny z poczynionym założeniem $|\theta/T_0| \ll 1$. W równaniu (2.9) należy przyjąć $\partial f(0, T_0)/\partial \varepsilon_{ij} = 0$, gdyż dla stanu naturalnego $\varepsilon_{ij} = 0, T = T_0$ powinno być $\sigma_{ij} = 0$.

Wprowadzając oznaczenie

$$\frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = c_{ijkl}, \quad \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} = -\beta_{ij}, \quad \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial T^2} = n,$$

przedstawimy związki (2.8) i (2.9) w postaci

$$(2.10) \quad f(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta + \frac{n}{2} \theta,$$

$$(2.11) \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2} (c_{ijkl} + c_{klij}) \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$(2.12) \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)_T = c_{ijkl}, \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_\varepsilon = -\beta_{ij}.$$

W związkach (2.11) rozpoznajemy prawo Hooke'a uogólnione na zagadnienia termospřężyste. Związki (2.11) noszą nazwę zależności Duhamela-Neumanna dla ciała anizotropowego. Stałe c_{ijkl} , β_{ij} , odnoszące się do stanu izotermicznego, pełnią rolę stałych materiałowych [7]. Wielkości c_{ijkl} są składowymi tensora sztywności sprężystej.

W teorii sprężystości ciała anizotropowego udowadnia się następujące własności symetrii tensora:

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijlk}, \quad c_{ijkl} = c_{klij}.$$

Związki te prowadzą do redukcji liczby stałych z 81 do 21 niezależnych od siebie stałych dla ciała o ogólnej anizotropii.

Rozwiążmy układ równań (2.11) względem odkształceń

$$(2.14) \quad \varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \theta.$$

Wielkości s_{ijkl} nazywamy współczynnikami podatności sprężystej. Również i dla tych wielkości obowiązują związki symetrii:

$$s_{ijkl} = s_{jikl}, \quad s_{ijkl} = s_{ijlk}, \quad s_{ijkl} = s_{klij}.$$

Rozpatrzmy teraz element objętościowy ciała anizotropowego wolny na swej powierzchni od naprężeń. Wtenczas zgodnie z (2.14) otrzymamy dla tego elementu

$$(2.15) \quad \varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} \theta.$$

Związek (2.15) opisuje znane zjawisko fizyczne, proporcjonalność odkształceń elementu do wzrostu temperatury θ . Wielkości α_{ij} są współczynnikami liniowej rozszerzalności cieplnej. Wielkość α_{ij} jest tensorem symetrycznym, co wynika z symetrii tensora ε_{ij} . Dodać należy, że współczynnik cieplnej rozszerzalności objętościowej α_{jj} jest niezmiennikiem.

Ze związków (2.11) i (2.14) otrzymamy następujące zależności:

$$(2.16) \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)_T = c_{ijkl}, \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_s = -\beta_{ij} = -\alpha_{kl} c_{ijkl}, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_\sigma = \alpha_{ij}.$$

W dalszych rozważaniach, odnoszących się do wyprowadzenia rozszerzonego równania przewodnictwa cieplnego, konieczne będzie przedstawienie energii we-

wewnętrznej oraz entropii jako funkcji odkształcenia i temperatury. Punktem wyjścia są różniczki zupełne

$$(2.17) \quad du = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + T ds,$$

$$(2.18) \quad ds = \left(\frac{\partial s}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T d\epsilon_{ij} + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\epsilon dT.$$

Wstawiając (2.18) do (2.17) otrzymamy

$$(2.19) \quad du = \left[T \left(\frac{\partial s}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T + \sigma_{ij} \right] d\epsilon_{ij} + T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\epsilon dT.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby wielkość du była różniczką zupełną, jest zależność

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[T \left(\frac{\partial s}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T + \sigma_{ij} \right] = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left[T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\epsilon \right].$$

Z warunku tego wynika związek

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_\epsilon = 0$$

albo, zważywszy na drugi wzór grupy (2.16),

$$(2.20) \quad \left(\frac{\partial s}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T = \beta_{ij}.$$

Z drugiej strony wykorzystamy związek termodynamiczny

$$(2.21) \quad T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\epsilon = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_\epsilon = c_\epsilon,$$

gdzie c_ϵ jest ciepłem właściwym przy stałym odkształceniu, odniesionym do jednostki objętości. Wstawiając (2.20) i (2.21) do związków (2.18) i (2.19) otrzymamy

$$(2.22) \quad ds = \beta_{ij} d\epsilon_{ij} + \frac{c_\epsilon}{T} dT,$$

$$(2.23) \quad du = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + T \beta_{ij} d\epsilon_{ij} + c_\epsilon dT.$$

Wstawiając do (2.23) związki (2.11) i całkując wyrażenie (2.20) i (2.23) przy założeniu, że dla stanu naturalnego ($T = T_0$, $\epsilon_{ij} = 0$, $\sigma_{ij} = 0$) jest $s = 0$, $u = 0$, otrzymamy

$$(2.24) \quad s = \beta_{ij} \epsilon_{ij} + c_\epsilon \ln \left(1 + \frac{\theta}{T_0} \right),$$

$$(2.25) \quad u = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + T_0 \beta_{ij} \epsilon_{ij} + c_\epsilon \theta.$$

W wyrażeniu na entropię pierwszy człon po prawej stronie pochodzi od sprzężenia pola odkształcenia z polem temperatury, drugi człon wyraża entropię wywołaną przepływem ciepła. W wyrażeniu tym brak jest członu czysto sprężystego.

Wynika to stąd, że proces odkształcenia w warunkach izotermicznych jest odwracalny i nie wywołuje wzrostu entropii. W wyrażeniu (2.25) na energię wewnętrzną występują trzy człony, pierwszy z nich ma charakter czysto sprężysty, przedstawia pracę odkształcenia, ostatni zawartość ciepła w jednostce objętości, środkowy człon pochodzi od wzajemnego oddziaływania pola odkształcenia i pola temperatury. Dla szczególnego przypadku procesu izotermicznego jest $u = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}/2 + T_0 \beta_{ij} \varepsilon_{ij}$.

Wróćmy do wyrażenia (2.24). Ze względu na poczynione założenie $|\theta/T_0| \ll 1$ funkcję $\ln(1+\theta/T_0)$ można rozwinąć w szereg nieskończony i uwzględnić tylko jeden człon rozwinięcia. Otrzymamy w ten sposób

$$(2.26) \quad s = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{c_e}{T_0} \theta.$$

Dla energii wewnętrznej $f = u - sT$, otrzymamy

$$(2.27) \quad f \approx \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta - \frac{c_e}{2T_0} \theta^2.$$

W ten sposób została określona wielkość $n = -c_e/T_0$, występująca w wyrażeniu (2.10).

Pozostaje powiązać entropię z przewodnictwem cieplnym. W ciele stałym przenoszenie się ciepła realizuje się przez przewodnictwo cieplne, rozumiane jako przenoszenie się ciepła z miejsc o wyższej temperaturze do miejsc o temperaturze niższej. Jest to proces samorzutny i nieodwracalny, powiązany z wytwarzaniem entropii. Równanie przewodnictwa cieplnego wyprowadza się z zasady zachowania energii, wyrażonego w postaci przepływu entropii. Prawo to, stanowiące lokalne sformułowanie drugiej zasady termodynamiki, ma postać

$$(2.28) \quad T \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q}, \quad \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} q_{i,i}.$$

Przez $\mathbf{q}$ oznaczmy wektor przepływu strumienia energii w naszym przypadku równy przepływowi ciepła.

Rozpatrzmy ciało obejmujące obszar V i ograniczony powierzchnią A . Wtedy całka

$$(2.29) \quad \frac{dS}{dt} = \int_V \frac{ds}{dt} dV = - \int_V \frac{q_{i,i}}{T} dV$$

oznacza przyrost entropii w jednostce czasu w objętości V , wywołany przepływem ciepła.

Związek (2.29) przedstawić można również w postaci

$$(2.29') \quad \frac{dS}{dt} = - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA - \int_V \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dV.$$

Przyrost entropii w czasie składa się tu z dwu zasadniczych części, z całki powierzchniowej wyrażającej wzrost (lub ubytek) entropii, wywołany wymianą ciepła z otoczeniem, i z całki związanej z tworzeniem entropii w obszarze V .

Wróćmy do związku (2.28), który przedstawić można w postaci

$$(2.30) \quad \frac{ds}{dt} = - \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} - \frac{q_i T_{,i}}{T^2}.$$

Wyrażenie to przedstawia przyrost entropii w czasie w sposób lokalny.

Z porównania (2.29') i (2.30) widoczne się staje, że pierwszy człon związku (2.30) odnosi się do wymiany entropii z otoczeniem, drugi człon do wytworzenia entropii w elementarnej objętości ciała. Związek (2.30) przedstawić można jako

$$(2.30') \quad \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \sigma,$$

gdzie $\sigma = -q_i T_{,i}/T^2$ jest źródłem entropii. Oznaczmy przez ds_e/dt wymianę entropii z otoczeniem, przez ds_i/dt szybkość tworzenia entropii. Zatem [5]

$$(2.31) \quad \frac{ds_e}{dt} = -\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = - \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i}, \quad \frac{ds_i}{dt} = - \frac{q_i T_{,i}}{T^2} = \sigma.$$

Lokalne sformułowanie drugiej zasady termodynamiki procesów nieodwracalnych żąda, żeby w każdym elemencie ciała

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds_e}{dt} + \frac{ds_i}{dt} > 0, \quad \frac{ds_i}{dt} = \sigma > 0.$$

Źródło entropii σ jest w procesie nieodwracalnym zawsze i wszędzie większe od zera, w procesie odwracalnym jest równe zeru. Z tego twierdzenia będziemy korzystać w dalszych rozważaniach.

Źródło entropii związane jest z przyczynami procesów nieodwracalnych, z tak zwanymi wielkościami intensywnymi, *bodźcami termodynamicznymi* F_i za pomocą następujących związków:

$$(2.32) \quad \sigma = F_i q_i.$$

Źródło entropii jest równe sumie iloczynów bodźców termodynamicznych i sprzężonych z nimi składowych strumieni przepływu ciepła. Z porównania związków (2.31) i (2.32) widoczne jest, że

$$(2.33) \quad F_i = - \frac{T_{,i}}{T^2}.$$

Zatem bodźcem termodynamicznym dla przewodnictwa cieplnego jest gradient temperatury.

Z drugiej strony między składowymi wektora przepływu ciepła $\mathbf{q}$, a bodźcami termodynamicznymi istnieje związek funkcyjny

$$(2.34) \quad q_i = q_i(F_1, F_2, F_3).$$

Dla przepływów laminarnych, które tu będziemy rozważać, przyjąć można, że związek (2.34) jest liniowy, zatem że

$$(2.35) \quad q_i = L_{ij} F_j.$$

Są to równania fenomenologiczne przepływu energii. Występujące w nich wielkości L_{ij} są stałymi, spełniającymi związki Onsagera

$$(2.36) \quad L_{ij} = L_{ji}.$$

Wstawiając (2.33) do (2.35) otrzymamy

$$(2.37) \quad q_i = -\frac{L_{ij}T_{,j}}{T^2}.$$

Równanie to jest zgodne z prawem Fouriera dla przewodnictwa cieplnego w ciele anizotropowym. Dla źródła entropii otrzymamy

$$(2.38) \quad \sigma = L_{ij} \frac{T_{,i}T_{,j}}{T^3} > 0.$$

Ponieważ zawsze musi być $\sigma > 0$, zatem wielkości L_{ij} muszą być dodatnie. Wprowadzając wielkości $\lambda_{ij} = L_{ij}/T^2 > 0$ (współczynniki przewodnictwa cieplnego) otrzymamy następujące prawo przepływu ciepła w ośrodku anizotropowym:

$$(2.39) \quad q_i = -\lambda_{ij}T_{,j}.$$

Wiążąc związki (2.39) i (2.28) oraz wykonując różniczkowanie względem czasu na związku (2.26) otrzymamy układ równań

$$(2.40) \quad T \frac{ds}{dt} = \lambda_{ij}T_{,ij},$$

$$(2.41) \quad T \frac{ds}{dt} = T\beta_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{c_e}{T_0} T \frac{d\theta}{dt}.$$

Z porównania tych równań wynika już równanie przewodnictwa cieplnego

$$(2.42) \quad \lambda_{ij}T_{,ij} = T\beta_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{c_e}{T_0} T \frac{d\theta}{dt}, \quad \theta = T - T_0.$$

Zauważmy, że jest to równanie nieliniowe ze względu na prawą stronę równania (2.42). Równanie to zlinearyzujemy przez przyjęcie $T = T_0$ po prawej stronie równania. Ostatecznie otrzymamy

$$(2.42') \quad \lambda_{ij}\theta_{,ij} - c_e\dot{\theta} - T_0\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = 0.$$

W tym rozszerzonym równaniu przewodnictwa cieplnego występuje człon $T_0\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$, charakteryzujący sprzężenie pola odkształcenia z polem temperatury. Kropka nad funkcją oznacza pochodną tej funkcji względem czasu. Jeśli w ciele działają źródła ciepła, to w związku (2.40) należy dodać wielkość W , określającą ilość ciepła wytworzoną w jednostce objętości i czasu

$$T \frac{ds}{dt} = \lambda_{ij}T_{,ij} + W.$$

Równanie (2.42') w przypadku występowania w ciele źródeł ciepła rozszerzy się do postaci

$$(2.42'') \quad \lambda_{ij}\theta_{,ij} - c_e\dot{\theta} - T_0\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = -W.$$

Z wyprowadzonych tu związków Duhamela-Neumanna dla ciała anizotropowego łatwo przejdziemy do ciała izotropowego stosując następujące związki:

$$(2.43) \quad \begin{aligned} c_{ijkl} &= \mu[\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}] + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}, \\ s_{ijkl} &= \mu'[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] + \lambda'\delta_{ij}\delta_{kl}, \\ \beta_{ij} &= \gamma\delta_{ij}, \quad \alpha_{ij} = \delta_{ij}\alpha_t. \end{aligned}$$

Tutaj μ , λ są stałymi Lamégo dla stanu izotermicznego, a

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t, \quad \mu' = \frac{1}{4\mu}, \quad \lambda' = -\frac{\lambda}{2\mu(\lambda + 3\mu)}.$$

Wielkość α_t jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności cieplnej. W ten sposób związki (2.11) i (2.14) przechodzą w związki Duhamela-Neumanna dla ciała izotropowego

$$(2.44) \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma\theta)\delta_{ij},$$

$$(2.45) \quad \varepsilon_{ij} = \alpha_t\theta\delta_{ij} + 2\mu'\sigma_{ij} + \lambda'\delta_{ij}\sigma_{kk}.$$

Dla ciała izotropowego jest $\lambda_{ij} = \lambda_0\delta_{ij}$. Zatem równanie przewodnictwa cieplnego (2.42'') przyjmie postać [4]:

$$\lambda_0\theta_{,jj} - c_e\dot{\theta} - T_0\gamma\dot{\varepsilon}_{kk} = -W,$$

albo

$$(2.46) \quad \theta_{,jj} - \frac{1}{\varkappa}\dot{\theta} - \eta\dot{\varepsilon}_{kk} = -\frac{Q}{\varkappa},$$

gdzie

$$\varkappa = \frac{\lambda_0}{c_e}, \quad \eta = \frac{\gamma T_0}{\lambda_0}, \quad Q = \frac{W}{\lambda_0}.$$

Podajmy jeszcze wyrażenia na u , f , s dla ciała izotropowego. Otrzymamy tu

$$(2.47) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}e\gamma(\theta + 2T_0) + c_e\theta, \\ f &= \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}e^2 - \gamma e\theta - \frac{c_e}{2T_0}\theta^2, \\ s &= \gamma e + c_e\frac{\theta}{T_0}, \quad e = \varepsilon_{kk}. \end{aligned}$$

Uzyskane w tym punkcie równanie stanu i równania przewodnictwa cieplnego należy powiązać z równaniami ruchu ciała stałego odkształcalnego. Otrzymamy w ten sposób komplet równań termosprężystości.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że sprzężenie pola temperatury i odkształcenia znika, gdy siły zewnętrzne czy też ogrzanie ciała jest stacjonarne. W tym przypadku w równaniu przewodnictwa cieplnego znikną pochodne czasowe, równanie (2.46) przechodzi w równanie Poissona.

3. Równania różniczkowe termospłężystości i metody ich rozwiązywania

Na komplet równań różniczkowych termospłężystości składają się równania ruchu i równanie przewodnictwa cieplnego. Równania ruchu

$$(3.1) \quad \sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0$$

przekształcić możemy przez wykorzystanie równań stanu

$$(3.2) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \gamma \theta) \delta_{ij}, \quad \mathbf{x} \in V + \Sigma, \quad t > 0$$

i związków między przemieszczeniami i odkształceniami

$$(3.3) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \mathbf{x} \in V + \Sigma, \quad t > 0$$

do układu trzech równań zawierających jako niewiadome funkcje przemieszczenia u_i i temperaturę θ :

$$(3.4) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \rho \ddot{u}_i + \gamma \theta_{,i}, \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0.$$

Powyższe równania oraz równanie przewodnictwa cieplnego

$$(3.5) \quad \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{u}_{k,k} = -\frac{Q}{\kappa}, \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0$$

są ze sobą sprzężone. Siły masowe, źródła ciepła, ogrzanie i przepływ ciepła przez powierzchnię Σ , ograniczającą obszar V , jak też i warunki początkowe są przyczynami powstania w ciele zarówno przemieszczeń, jak i towarzyszącej im temperatury. Warunki brzegowe typu mechanicznego dane są albo w postaci danych przemieszczeń u_i , albo obciążeń $p_i = \sigma_{ij} n_j$ na powierzchni Σ . Warunki termiczne można w sposób ogólny zapisać w postaci

$$(3.6) \quad \alpha \frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta \theta = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma, \quad t > 0, \quad \alpha, \beta \text{ — stałe,}$$

określającej przepływ ciepła przez powierzchnię Σ . Jeśli $\beta = \infty$, to mamy do czynienia z zerową na brzegu temperaturą θ , jeśli $\alpha = \infty$, to mamy przypadek powierzchni Σ termicznie izolowanej. Warunki początkowe sygnalizują, że w chwili początkowej, na przykład dla $t = 0$, przemieszczenie u_i , prędkość tych przemieszczeń i temperatura są funkcjami znanymi

$$(3.7) \quad u_i(\mathbf{x}, t)_{t=0} = f_i(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, t)_{t=0} = g_i(\mathbf{x}), \quad \theta(\mathbf{x}, t)_{t=0} = h(\mathbf{x}).$$

Układ równań (3.4) i (3.5) jest nader złożony i naturalnym staje się dążenie sprowadzenia tego układu do równań prostszych, równań falowych. Istotne uproszczenie równań uzyskuje się przez rozłożenie wektora przemieszczenia i wektora sił masowych na część potencjalną i część solenoidalną. Wstawiając zatem do równań (3.4) i (3.5)

$$(3.8) \quad u_i = \Phi_{,i} + \varepsilon_{ijk} \psi_{k,j}, \quad X_i = \varrho(\vartheta_{,i} + \varepsilon_{ijk} \chi_{k,j}),$$

gdzie funkcje Φ i ϑ są funkcjami skalarnymi ψ_i i χ_i funkcjami wektorowymi, doprowadza się równania termosprężystości do następującego układu równań [8]:

$$(3.9) \quad \square_1^2 \Phi - m\theta = -\frac{1}{c_1^2} \vartheta,$$

$$(3.10) \quad \square_2^2 \psi_i = -\frac{1}{c_2^2} \chi_i,$$

$$(3.11) \quad D\theta - \eta \nabla^2 \Phi = -\frac{Q}{\kappa}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad m = \frac{\gamma}{\rho c_1^2}.$$

Wprowadzono tu oznaczenia

$$\square_\alpha^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_\alpha^2} \partial_t^2, \quad D = \nabla^2 - \frac{1}{\kappa} \partial_t, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Równania (3.9) i (3.11) są ze sobą sprzężone w sposób bezpośredni. Eliminacja funkcji θ prowadzi do równania fali podłużnej

$$(3.12) \quad (\square_1^2 D - \eta m \partial_t \nabla^2) \Phi = -\frac{mQ}{\kappa} - \frac{1}{c_1^2} D\vartheta.$$

Równanie (3.10) opisuje falę poprzeczną. Zauważmy, że funkcje Φ i ψ_i są ze sobą związane poprzez warunki brzegowe, które w każdym przypadku wyrażone będą przez przemieszczenia u_i i pochodne tych funkcji oraz przez temperaturę θ .

Eliminując z równań (3.9) i (3.11) funkcję Φ otrzymamy równanie

$$(3.13) \quad (\square_1^2 D - \eta m \partial_t \nabla^2) \theta = -\frac{m}{\kappa} \square_1^2 Q - \frac{1}{c_1^2} \eta \partial_t \nabla^2 \vartheta.$$

Spostrzegamy, że równania (3.12) i (3.13) mają tę samą postać. Struktura tych wzorów, o czym będzie jeszcze mowa później, wskazuje, że mamy do czynienia z falą tłumioną i ulegającą dyspersji. W nieograniczonej przestrzeni termosprężystej fale podłużne i poprzeczne rozprzestrzeniają się niezależnie od siebie. Załóżmy, że źródłem ruchu są źródła ciepła Q i siły masowe $X_i = \rho \vartheta_{,i}$. Przy założeniu, że $\chi_i = 0$ oraz że warunki początkowe związane z równaniem (3.10) są równe zeru, otrzymamy $\psi_i \equiv 0$ w całej przestrzeni.

W nieograniczonej przestrzeni powstaną jedynie fale podłużne, dylatacyjne. Zważywszy na (3.2) i (3.8) mamy

$$u_i = \Phi_{,i}, \quad \varepsilon_{ij} = \Phi_{,ij}, \quad \varepsilon_{kk} = \nabla^2 \Phi,$$

oraz

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\Phi_{,ij} - \delta_{ij} \Phi_{,kk}) + \rho \delta_{ij} (\ddot{\Phi} - \vartheta).$$

Jeśli w przestrzeni nieograniczonej działać będą siły masowe $X_i = \rho \varepsilon_{ijk} \chi_{k,j}$, a $Q = 0$, $\vartheta = 0$ oraz $\Phi(\mathbf{x}, 0) = 0$, $\dot{\Phi}(\mathbf{x}, 0) = 0$, to różnymi od zera będą jedynie funkcje ψ_i , natomiast $\Phi \equiv 0$, $\theta \equiv 0$ w całym obszarze. Propagować będą się jedynie

fale poprzeczne z prędkością $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$. Falam tym nie towarzyszy wytwarzanie ciepła. Zauważmy, że dla fal poprzecznych jest

$$u_i = \epsilon_{ijk} \psi_{k,j}, \quad u_{k,k} = 0, \quad \theta = 0, \quad \sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

W ciele ograniczonym wystąpią w zasadzie jednocześnie oba rodzaje fal. Rozwiązanie równań (3.10) i (3.12) złożymy z dwu części, z całek szczególnych tych równań Φ^0 , ψ^0 oraz z całek ogólnych równań jednorodnych

$$(\square_1^2 D - \eta m \partial_t \nabla^2) \Phi' = 0, \quad \square_2^2 \psi' = 0,$$

przy czym funkcje Φ' i ψ^0 należy dobrać w ten sposób, aby spełnione były wszelkie warunki brzegowe.

Dalszą metodą, stosowaną przy rozwiązywaniu równań różniczkowych termospřężystości jest metoda rozwikłania równań, polegająca na doprowadzeniu układu równań (3.4) i (3.5) do układu czterech równań niesprężonych. W każdym równaniu występuje jedna tylko nieznaną funkcja. Metoda ta chyba po raz pierwszy była stosowana przez HILBERTA [9] w odniesieniu do równań różniczkowych optyki. Pewną jej odmianę w postaci operatorowej, obmyśloną przez G. MOISILA [10] zastosowała do równań quasi-statycznych termospřężystości V. IONESCU-CAZIMIR [12]. Na innej drodze rozwikłanie równań dynamicznych termospřężystości uzyskał S. KALISKI [11]. Wynik jego został powtórzony jeszcze na innej drodze przez J. S. PODSTRIGACZA [13] oraz D. RÜDIGERA [14].

Nie wchodząc w szczegóły tej metody podamy jedynie wynik końcowy. Wprowadzamy jedną funkcję wektorową φ_i i skalarną ψ i za ich pomocą wyrażamy przemieszczenie i temperaturę w sposób następujący:

$$(3.14) \quad u_i = (\Omega \delta_{ij} - I' \partial_i \partial_j) \varphi_j + \gamma_0 \partial_i \psi,$$

$$(3.15) \quad \theta = \eta \partial_i \partial_j \square_2^2 \varphi_j + (1+a) \square_1^2 \psi,$$

gdzie

$$\Omega = (1+a) \square_1^2 D - \gamma_0 \eta \partial_t \nabla^2, \quad I' = aD - \gamma_0 \eta \partial_t, \quad a = \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma}{\mu}.$$

Wstawiając u_i i θ do równań (3.4) i (3.5) otrzymamy cztery rozwikłane już równania dla funkcji Φ i ψ :

$$(3.16) \quad \square_2^2 (\square_1^2 D - \eta m \partial_t \nabla^2) \varphi_i + \frac{X_i}{\rho c_1^2} = 0,$$

$$(3.17) \quad (\square_1^2 D - m \eta \partial_t \nabla^2) \psi + \frac{Q\mu}{\kappa c_1^2 \rho} = 0.$$

Do równań tych należy jeszcze dodać warunki brzegowe i początkowe. W warunkach brzegowych występują oczywiście funkcje φ_i i ψ . Prostota równań różniczkowych (3.16) i (3.17) jest jednak okupiona złożoną postacią warunków brzegowych. Dlatego też równania (3.16) i (3.17) znajdują zastosowanie przede wszystkim w zagadnieniach ruchu w przestrzeni nieograniczonej, gdzie warunki w sensie ścisłym

odpadają, zastąpione przez żądanie zerowych wartości przemieszczeń i temperatury w nieskończoności. Ten postulat będzie spełniony, jeśli rozmieszczenie sił masowych i źródeł ciepła ograniczy się do obszaru skończonego.

Interesującą drogę rozwiązania równań różniczkowych termosprężystości podał H. ZORSKI [15]. Droga ta zmierza do przekształcenia układu równań różniczkowych (3.4) i (3.5) do układu trzech równań różniczkowych dla przemieszczeń u_i . Przedstawimy ją pokrótce w odniesieniu do przestrzeni nieograniczonej przy założeniu jednorodnych warunków początkowych. Napiszmy równanie przewodnictwa w takiej postaci, aby człon zawierający prędkość dylatacji znalazł się po prawej stronie równania

$$(3.18) \quad \theta_{,ij} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} = \eta \dot{u}_{i,j}.$$

Traktując funkcję $\eta \dot{u}_{i,j}$ jako źródła ciepła, można podać rozwiązanie równania (3.18) przy użyciu funkcji Greena dla klasycznego równania przewodnictwa cieplnego

$$(3.19) \quad G_{,ij} - \frac{1}{\kappa} \dot{G} = -\frac{1}{\kappa} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t), \quad G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\exp\left(-\frac{\varrho^2}{4\kappa t}\right)}{8\pi^{3/2} \kappa^{3/2} t^{3/2}}.$$

Wstawiając rozwiązanie równania (3.18)

$$\theta(\mathbf{x}, t) = -\eta \kappa \int_0^t d\tau \int_V G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{div} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau) dV(\boldsymbol{\xi}), \quad \varrho^2 = (\xi_i - x_i)(\xi_i - x_i),$$

do równań przemieszczeniowych (3.4) uzyskamy następujące równanie różniczkowo-całkowe:

$$(3.20) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \varrho \ddot{\mathbf{u}} = \\ = -\eta \kappa \gamma \operatorname{grad} \int_0^t d\tau \int_V G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{div} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau) dV(\boldsymbol{\xi}).$$

Jeśli dokonać rozłożenia wektora przemieszczenia według wzoru (3.8), to równanie (3.20) rozpada się na układ równań

$$(3.21) \quad \square_1^2 \Phi + \frac{\gamma \eta}{c_1^2 \varrho} \int_0^t d\tau \int_V G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 \Phi(\boldsymbol{\xi}, \tau) dV(\boldsymbol{\xi}) = 0,$$

$$(3.22) \quad \square_2^2 \boldsymbol{\psi} = 0.$$

Równanie różniczkowo-całkowe (3.21) jest równoważne równaniom (3.9) i (3.11).

W pewnych przypadkach, zwłaszcza gdy warunki brzegowe podane są w naprężeniach, warto korzystać z równań analogicznych do równań Beltramiego-Michella. Równania te dla zagadnień niesprężonych zostały wyprowadzone przez J. IGNA-CZAKA [16], dla zagadnień sprężonych przez E. SOÓSA [17]. Inną metodę rozwiązywania w naprężeniach podał W. NOWACKI [18] w odniesieniu do płaskiego stanu odkształcenia.

Jeśli zmienność sił masowych, źródeł ciepła, obciążeń i ogrzań powierzchniowych jest powolna, to w równaniach ruchu pominać można człony inercyjne, a zagadnienie traktować jako quasi-statyczne. Równania quasi-statyczne termosprężystości

$$(3.23) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \gamma \theta_{,i},$$

$$(3.24) \quad \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{u}_{j,j} = -\frac{Q}{\kappa}$$

są nadal ze sobą sprzężone. Szczególnie prosto przedstawia się rozwiązanie tego układu równań dla nieograniczonego ośrodka termosprężystego, w którym działają źródła ciepła Q oraz siły masowe typu potencjalnego $X_i = \varrho \vartheta_{,i}$. Przez wprowadzenie potencjału termosprężystego przemieszczenia Φ otrzymamy z (3.23) i (3.24) rozwikłany układ równań [15]

$$(3.25) \quad \nabla^2 \theta - \frac{1}{\kappa_1} \dot{\theta} = -\frac{Q}{\kappa} - \frac{\eta}{c_1^2} \dot{\Phi}, \quad \nabla^2 \Phi = m\theta - \frac{\vartheta}{c_1^2}, \quad \kappa_1 = \frac{\kappa}{1 + \varepsilon}, \quad \varepsilon = \eta m \kappa.$$

Temperaturę θ wyznacza się tu z parabolicznego równania różniczkowego w strukturze swej podobnego do klasycznego równania przewodnictwa ciepłego.

Do rozwikłania układu równań (3.23) i (3.24) zastosować można również sposób poprzednio przedstawiony [równania (3.14)–(3.17)], pomijając występujące tam człony inercyjne.

Interesujący jest wreszcie sposób podany przez M. A. BИОТ [4]. Przez wprowadzenie wyrażenia na entropię

$$(3.26) \quad s = \gamma \varepsilon_{kk} + \frac{c_e}{T_0} \theta$$

do równań (3.23) i (3.24) przy założeniu, że $Q = 0$, $X_i = 0$, otrzymuje się układ równań

$$(3.27) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu + \delta) u_{j,ji} = \gamma \beta s_{,i},$$

$$(3.29) \quad s_{,jj} - \frac{1}{\kappa_2} \dot{s} = 0, \quad \delta = \gamma^2 \beta, \quad \beta = \frac{T_0}{c_e}, \quad \kappa_2 = \kappa \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu + \beta^2}.$$

Równania te są rozwikłane, a entropia spełnia równanie paraboliczne. Rozwiązanie równań (3.27) można podać w postaci potencjałów Papkowicza-Boussinesqa

$$(3.30) \quad u_i = -(\psi_{0,i} + x_j \psi_{j,i}) + B \psi_i, \quad B = 2 \frac{2\mu + \lambda + \delta}{\lambda + \mu + \delta},$$

przy założeniu, że funkcja wektorowa ψ_i jest funkcją harmoniczną. Do wyznaczenia funkcji ψ_0 , ψ_i mamy do dyspozycji równania

$$(3.31) \quad \nabla^2 \psi_i = 0, \quad \nabla^2 \psi'_0 = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\kappa_2} \partial_t \right) \psi''_0 = 0,$$

gdzie $\psi_0 = \psi'_0 + \psi''_0$.

Po wyznaczeniu funkcji ψ_0 , ψ_i przy uwzględnieniu warunków brzegowych i początkowych otrzymamy przemieszczenia ze wzoru (3.30).

Jak na wstępie wspomnieliśmy, termosprężystość mieści w sobie całe działy dotąd oddzielnie rozwijanych kierunków: elastokinetykę klasyczną, teorię przewodnictwa cieplnego oraz teorię naprężeń cieplnych. Do równań różniczkowych klasycznej elastokinetyki dojdziemy przy założeniu, że ruch odbywa się w warunkach adiabatycznych, a więc bez wymiany ciepła między poszczególnymi częściami ciała. Ponieważ dla procesu adiabatycznego jest $\dot{s} = 0$, zatem ze wzoru (3.26) otrzymamy $\dot{\theta} = -\eta \kappa \dot{\epsilon}_{kk}$ albo po scałkowaniu i przyjęciu jednorodnych warunków początkowych:

$$(3.32) \quad \theta = -\eta_T \kappa \epsilon_{kk}.$$

Równanie to zastępuje równanie przewodnictwa cieplnego. Wstawiając (3.32) do (3.4) uzyskamy równanie przemieszczeniowe klasycznej elastokinetyki

$$(3.33) \quad \mu_s u_{i,jj} + (\lambda + \mu)_s u_{j,ji} + X_i = \rho \ddot{u}_i,$$

gdzie

$$\lambda_s = \lambda_T + \gamma_T \eta_T \kappa, \quad \mu_T = \mu_s.$$

Wielkości λ_s , μ_s są stałymi Lamégo mierzonymi w warunkach adiabatycznych. Równania stanu po wstawieniu (3.32) do (3.2) przyjmą postać

$$(3.34) \quad \sigma_{ij} = 2\mu_s \epsilon_{ij} + \lambda_s \epsilon_{kk} \delta_{ij}.$$

W teorii naprężeń cieplnych, w której rozpatruje się wpływ ogrzania powierzchni ciała oraz działanie źródeł ciepła na stan odkształcenia i naprężenia ciała, przyjmuje się, że wpływ członu $\eta \dot{\epsilon}_{kk}$ występującego w równaniu przewodnictwa cieplnego na odkształcenie ciała jest nader mały i praktycznie pomijalny. To uproszczenie prowadzi do układu dwu równań od siebie niezależnych

$$(3.35) \quad \mu_T u_{i,jj} + (\lambda_T + \mu_T) u_{j,ji} = \rho \ddot{u}_i + \gamma_T \theta_{,i},$$

$$(3.36) \quad \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} = -\frac{Q}{\kappa}.$$

Z równania (3.36), a więc z klasycznego równania przewodnictwa cieplnego wyznacza się temperaturę θ . Znajomość rozkładu temperatury zezwala wyznaczyć przemieszczenia z równań (3.35). Teoria naprężeń cieplnych posiada bogatą literaturę naukową. Wiele praktycznych zagadnień tak quasi-statycznych jak i dynamicznych zostało do tej pory rozwiązanych. Metody rozwiązania układu równań (3.35) i (3.36) zostały szczegółowo opracowane. Czytelnik znajdzie je w monografiach [19–22].

W przypadku ustalonego przepływu ciepła tworzenie się entropii kompensowane jest przez wymianę entropii z otoczeniem. Wymiana ta jest ujemna i równa co do wartości bezwzględnej produkcji entropii w ciele. W równaniach termosprężystości (3.4) i (3.5) odpadają pochodne względem czasu. Równanie (3.4) przechodzi w równanie elastostatyki

$$(3.37) \quad \mu_T u_{i,jj} + (\lambda + \mu)_T + X_i = \gamma \theta_{,i},$$

a równanie przewodnictwa cieplnego staje się równaniem typu eliptycznego, równaniem Poissona

$$(3.38) \quad \theta_{,jj} = -\frac{Q}{\kappa}.$$

Ze względu na znaną analogię sił masowych [23] wyznaczenie naprężeń cieplnych sprowadza się tu do rozwiązań klasycznej teorii sprężystości.

4. Twierdzenie wariacyjne termosprężystości

Wiadomo jak poważną rolę odgrywają w teorii sprężystości twierdzenia wariacyjne przy wariacji stanu odkształcenia lub stanu naprężenia. Pozwalają one nie tylko na wyprowadzenie równań różniczkowych opisujących zginanie płyt, powłok, tarcz, membran itd., ale i na konstruowanie rozwiązań przybliżonych. Poniżej podamy twierdzenie wariacyjne przy wariacji stanu odkształcenia dla termosprężystości, obmyślane przez M. A. BIORA [4]. Składać się ono będzie z dwu części, przy czym pierwsza z nich wykorzystuje znaną z teorii sprężystości zasadę d'Alemberta

$$(4.1) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_\Sigma p_i \delta u_i d\Sigma.$$

W równaniu tym δu_i są wirtualnymi przyrostami przemieszczeń, $\delta \varepsilon_{ij}$ wirtualnymi przyrostami odkształceń. Zakładamy, że δu_i i $\delta \varepsilon_{ij}$ są funkcjami ciągłymi, dowolnymi, niezależnymi od czasu i zgodnymi z warunkami ograniczającymi ruch ciała.

Zasada d'Alemberta jest ważna bez względu na materiał ciała, tj. przy wszystkich zależnościach stanu naprężenia od stanu odkształcenia. Włączając do (4.1) równanie stanu (3.2) i wprowadzając wielkość

$$(4.2) \quad W = \int_V \left(\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} e^2 \right) dV,$$

w której funkcja podcałkowa jest formą kwadratową dodatnio określoną, otrzymamy z (4.1) następujące równanie

$$(4.3) \quad \delta W = \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_\Sigma p_i \delta u_i dV + \gamma \int_V \theta \delta e dV, \quad e = \varepsilon_{kk}.$$

Druga część twierdzenia wariacyjnego czynić powinna użytek z praw rządzących przepływem ciepła. Dlatego też posłużymy się związkami wiążącymi przepływ ciepła z temperaturą i entropią:

$$(4.4) \quad q_i = -\lambda_0 \theta_{,i}, \quad -q_{i,i} = \dot{s} T_0 = \gamma \dot{e}_{kk} T_0 + c_e \dot{\theta}.$$

Związki te można wypisać w dogodniejszej dla dalszych rozważań postaci przez wprowadzenie funkcji wektorowej S_i , związanej z entropią i przepływem następującymi związkami:

$$(4.5) \quad s = -S_{i,i}, \quad q_i = T_0 \dot{S}_i.$$

Wiążąc z sobą związki (4.4) i (4.5) mamy

$$(4.6) \quad T_0 \dot{S}_i = -\lambda_0 \theta_{,i}, \quad -T_0 \dot{S}_{i,i} = c_e \dot{\theta} + T_0 \gamma \dot{e}_{kk}.$$

Pomnóżmy pierwsze z równań (4.6) przez przyrost wirtualny δS_i i scałkujmy po obszarze ciała

$$(4.7) \quad \int_V \left(\theta_{,i} + \frac{T_0}{\lambda_0} \dot{S}_i \right) \delta S_i dV = 0.$$

Przez przekształcenie tej całki i przy wzięciu pod uwagę drugiego ze związków (4.6) uzyskamy równanie

$$(4.8) \quad \frac{c_\varepsilon}{T_0} \int_V \theta \delta \theta dV + \frac{T_0}{\lambda_0} \int_V \dot{S}_i \delta S_i dV + \int_\Sigma \theta n_i \delta S_i d\Sigma + \gamma \int_V \theta \delta e dV = 0,$$

w którym występuje człon $\int_V \theta \delta e dV$, identyczny z członem występującym w (4.3).

Eliminując ten człon z równań (4.4) i (4.8) otrzymamy ostateczną postać twierdzenia wariacyjnego

$$(4.9) \quad \delta(W+P+D) = \int_V (X_i - \varrho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_\Sigma p_i \delta u_i d\Sigma - \int_\Sigma \theta n_i \delta S_i d\Sigma.$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenia

$$(4.10) \quad P = \frac{c_\varepsilon}{2T_0} \int_V \theta^2 dV, \quad D = \frac{T_0}{2\lambda_0} \int_V (\dot{S}_i)^2 dV.$$

Funkcję P nazywamy potencjałem cieplnym, D funkcją dyssypacji. Rozpatrzmy jeszcze przypadki szczególne. Jeśli w równaniu (4.3) przyjąć, że $\theta = -\eta_T \kappa \varepsilon_{kk}$, co odpowiada przyjęciu procesu adiabatycznego, to równanie to przechodzi na

$$(4.11) \quad \delta W^{(s)} = \int_V (X_i - \varrho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_\Sigma p_i \delta u_i d\Sigma,$$

gdzie

$$W^{(s)} = \int_V \left(\mu_s \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda_s}{2} \varepsilon_{kk}^2 \right) dV,$$

a μ_s , λ_s są adiabatycznymi stałymi Lamégo. Równanie (4.11) stanowi zasadę d'Alemberta dla elastokinetyki klasycznej.

W teorii naprężeń cieplnych pomijamy wzajemne oddziaływanie pola odkształcenia i temperatury, co wyraża się przez skreślenie członu $\gamma \dot{\varepsilon}_{kk} T_0$ w drugim z równań (4.4). Pominięcie tego członu prowadzi do zmodyfikowania równania (4.8). Otrzymamy tu

$$(4.12) \quad \delta P + \delta D + \int_\Sigma \theta n_i \delta S_i d\Sigma = 0.$$

Równanie (4.12) wyraża twierdzenie wariacyjne dla klasycznego, niesprężonego zagadnienia przewodnictwa cieplnego. W teorii naprężeń cieplnych mamy do dyspozycji dwa równania, równanie (4.12) oraz równanie (4.3), w którym funkcję θ traktuje się jako funkcję znaną.

Wróćmy do ogólnego twierdzenia wariacyjnego termosprężystości (4.9) i założymy, że wirtualne przyrosty δu_i , $\delta \varepsilon_{ij}$, δS_i itd. pokrywają się z przyrostami rzeczywiście występującymi przy przejściu od chwili t do $t+dt$. Wtedy

$$(4.13) \quad \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt = v_i dt, \quad \delta S_i = \frac{\partial S_i}{\partial t} dt = \dot{S}_i dt, \quad \delta W = \dot{W} dt \text{ itd.}$$

Wstawiając (4.13) do (4.9) otrzymamy

$$(4.14) \quad \frac{d}{dt}(K+W+P)+\chi_T = \int_V X_i v_i dV + \int_{\Sigma} p_i v_i d\Sigma + \frac{\lambda_0}{T_0} \int_{\Sigma} \theta \theta_{,n} d\Sigma,$$

gdzie $K = \frac{\rho}{2} \int_V v_i v_i dV$ jest energią kinetyczną, a χ_T funkcją dyssypacyjną, przy czym

$$\chi_T = \lambda_0 T_0 \int_V \left(\frac{\theta_{,i}}{T_0} \right)^2 dV = \lambda_0 T_0 \int_V \left(\frac{q_i}{\lambda_0 T_0} \right)^2 dV.$$

Równanie (4.14) nazywamy podstawowym twierdzeniem energetycznym termospřżystości. Twierdzenie to wykorzystać można do określenia jednoznaczności rozwiązań równań termospřżystości [21, 24]. Postępując podobnie jak w teorii sprężystości założymy, że równania termospřżystości spełnione są przez dwie grupy funkcji u'_i , θ' oraz u''_i , θ'' . Tworząc różnicę tych rozwiązań $\hat{u}_i = u'_i - u''_i$, $\hat{\theta} = \theta' - \theta''$ i wstawiając do równań (3.4) i (3.5) spostrzeżemy, że równania te są jednorodne, spełniają jednorodne warunki brzegowe i początkowe. Funkcjom $\hat{u}_i$, $\hat{\theta}$ odpowiada zatem ciało termospřżyste, w którego wnętrzu brak źródeł ciepła i sił masowych, a które na swej powierzchni jest nieobciążone i znajduje się w warunkach zerowej temperatury $\hat{\theta}$. Wzór (4.14) odpowie na pytanie, czy we wnętrzu ciała wystąpią przemieszczenia $\hat{u}_i$ i temperatura $\hat{\theta}$. Równanie (4.14) przyjmie postać

$$(4.15) \quad \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\rho}{2} \hat{v}_i \hat{v}_i + \mu \hat{\varepsilon}_{ij} \hat{\varepsilon}_{ij} + \frac{\lambda}{2} \hat{\varepsilon}_{kk}^2 + \frac{\gamma}{2\eta\kappa} \hat{\theta}^2 \right) dV = - \frac{\lambda_0}{T_0} \int_V (\hat{\theta}_{,i})^2 dV \leq 0.$$

Całka występująca po lewej stronie równania jest w chwili początkowej równa zero, gdyż funkcje $\hat{u}_i$, $\hat{v}_i$, $\hat{\varepsilon}_{ij}$, $\hat{\theta}$ spełniają jednorodne warunki początkowe. Z drugiej strony wyprowadzona nierówność wskazuje, że lewa strona równania albo maleje przyjmując wartości ujemne, albo też jest równa zero.

Ponieważ wyrażenie podcałkowe jest sumą kwadratów, a funkcja podcałkowa jest równa zero dla $t = 0$, zatem jest możliwa jedynie druga z wymienionych możliwości. W wyniku otrzymamy, że $\hat{v}_i = 0$, $\hat{\varepsilon}_{ij} = 0$, $\hat{\theta} = 0$ dla $t \geq 0$. Ponieważ naprężenia $\hat{\sigma}_{ij}$ związane są liniowo z wielkościami $\hat{\varepsilon}_{ij}$, $\hat{\theta}$ zatem i $\hat{\sigma}_{ij} = 0$ dla $t \geq 0$. W rezultacie otrzymamy

$$(4.16) \quad u'_i = u''_i, \quad \theta' = \theta'', \quad \sigma'_{ij} = \sigma''_{ij} \quad \text{dla} \quad t \geq 0.$$

Istnieje zatem jedno tylko rozwiązanie równań termospřżystości.

5. Twierdzenie o wzajemności

Jednym z najbardziej interesujących twierdzeń teorii sprężystości jest twierdzenie o wzajemności E. BETTIEGO, z tego bowiem twierdzenia wynika nie tylko symetria rozwiązań podstawowych (funkcji Greena), ale twierdzenie to daje podstawę do konstruowania dalszych metod całkowania równań różniczkowych teorii sprężystości.

Rozszerzone twierdzenie o wzajemności, odnoszące się do zagadnień termospřżystości, zostało w pełni sformułowane przez V. IONESCU-CAZIMIR [25]. Ele-

menty tego twierdzenia, choć wyrażone w mniej ogólnej postaci, znajdziemy u M. A. BİOTA [26].

Twierdzenie o wzajemności przedstawimy w głównych jego zarysach kładąc punkt ciężkości na jego rozliczne zastosowania.

Niech w ciele izotropowym działają dwa układy sił. Zakładamy, że wewnątrz ciała V działają źródła ciepła i siły masowe, a na jego powierzchni dane są obciążenia p_i i temperatura $\theta = \vartheta$. Przyczyny te oznaczmy skrótowo symbolem $I = \{X_i, p_i, Q, \vartheta\}$, a wywołane przez nich skutki symbolem $C = \{u_i, \theta\}$. Drugi układ przyczyn i skutków oznaczmy przez $I' = \{X'_i, p'_i, Q', \vartheta'\}$ oraz $C' = \{u'_i, \theta'\}$. Zakładamy, że warunki początkowe są jednorodne. Wychodząc z równań ruchu, równań przewodnictwa cieplnego i ze związków Duhamela-Neumanna, wypisanych dla obu układów, odpowiednio dodając te układy i całkując po obszarze V , otrzymamy dwa równania o wzajemności dla transformacji funkcji występujących w obu układach

$$(5.1) \quad \int_V (\bar{X}_i \bar{u}'_i - \bar{X}'_i \bar{u}_i) dV + \int_\Sigma (\bar{p}_i \bar{u}'_i - \bar{p}'_i \bar{u}_i) d\Sigma + \gamma \int_V (\bar{\theta} \bar{e}' - \bar{\theta}' \bar{e}) dV = 0,$$

$$(5.2) \quad \int_V (\bar{Q}' \bar{\theta} - \bar{Q} \bar{\theta}') dV + \kappa \eta p \int_V (\bar{\theta}' \bar{e} - \bar{\theta} \bar{e}') dV + \kappa \int_\Sigma (\bar{\vartheta}' \bar{\theta}'_{,n} - \bar{\vartheta} \bar{\theta}'_{,n}) d\Sigma = 0,$$

gdzie

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}, p) = \int_0^\infty u_i(\mathbf{x}, t) e^{-pt} dt, \text{ itd.}$$

Pierwsze z tych równań powstało z wykorzystania równań ruchu i równań stanu przy zastosowaniu przekształcenia Greena. Eliminując z tych równań wspólne człony uzyskamy następujące równanie:

$$(5.3) \quad \eta \kappa p \left[\int_V (\bar{X}_i \bar{u}'_i - \bar{X}'_i \bar{u}_i) dV + \int_\Sigma (\bar{p}_i \bar{u}'_i - \bar{p}'_i \bar{u}_i) d\Sigma \right] = \\ = \kappa \gamma \int_\Sigma (\bar{\vartheta}' \bar{\theta}'_{,n} - \bar{\vartheta} \bar{\theta}'_{,n}) d\Sigma + \gamma \int_V (\bar{Q} \bar{\theta}' - \bar{Q}' \bar{\theta}) dV.$$

Na równaniu (5.3) należy wykonać jeszcze odwrotną transformację Laplace'a. Przy wykorzystaniu twierdzenia o splocie otrzymamy

$$(5.4) \quad \eta \kappa \left\{ \int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t \left[X_i(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial u'_i(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} - X'_i(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau + \right. \\ \left. + \int_\Sigma d\Sigma(\mathbf{x}) \int_0^t \left[p_i(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial u'_i(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} - p'_i(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \right\} = \\ = \gamma \int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t [Q(\mathbf{x}, t-\tau) \theta'(\mathbf{x}, \tau) - Q'(\mathbf{x}, t-\tau) \theta(\mathbf{x}, \tau)] d\tau + \\ + \gamma \kappa \int_\Sigma d\Sigma(\mathbf{x}) \int_0^t [\vartheta'(\mathbf{x}, t-\tau) \theta'_{,n}(\mathbf{x}, \tau) - \vartheta(\mathbf{x}, t-\tau) \theta'_{,n}(\mathbf{x}, \tau)] d\tau.$$

Równanie (5.4) jest słuszne tak dla zagadnienia dynamicznego jak i dla zagadnienia quasi-statycznego. W obu jednak przypadkach funkcje u_i , θ oraz u'_i , θ' mają odmiennie znaczenie. W rozważaniach naszych przyjęto, że na powierzchni Σ dano obciążenia p_i i temperaturę $\theta = \vartheta$. Ze struktury równań (5.4) widoczne jest, że na Σ przyjąć można również przemieszczenia oraz przepływ ciepła, proporcjonalny do gradientu temperatury $\theta_{,n} = \vartheta_{,n}$. Równania (5.4) są spełnione również dla przypadku mieszanych warunków brzegowych.

Równanie (5.4) przyjmie szczególnie prostą postać dla ciała nieograniczonego, w tym bowiem przypadku znikają całki powierzchniowe.

Jeśli mamy do czynienia z drganiami harmonicznymi w czasie

$$X_i(\mathbf{x}, t) = X_i^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad p_i(\mathbf{x}, t) = p_i^*(\mathbf{x})e^{i\omega t} \text{ itd.},$$

to równanie o wzajemności przyjmie postać

$$(5.4') \quad \eta\kappa i\omega \left[\int_V (X_i^* u_i'^* - X_i'^* u_i^*) dV + \int_\Sigma (p_i^* u_i'^* - p_i'^* u_i^*) d\Sigma \right] = \\ = \kappa\gamma \int_\Sigma (\vartheta'^* \theta_{,n}^* - \vartheta^* \theta_{,n}'^*) d\Sigma + \gamma \int_V (Q^* \theta'^* - Q'^* \theta^*) dV.$$

Z równania (5.4) otrzymamy szereg interesujących wniosków. Załóżmy, że w punkcie ξ obszaru V działa chwilowa skupiona siła $X_i = \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t) \delta_{ij}$, zwrócona w kierunku osi x_j , a w punkcie ξ' siła skupiona $X_i' = \delta(\mathbf{x} - \xi') \delta(t) \delta_{ik}$, a więc zwrócona w kierunku osi x_k . Jeśli założyć, że warunki brzegowe są jednorodne, to ze związku (5.4) otrzymamy

$$\frac{\partial u_j'(\xi, \xi', t)}{\partial t} = \frac{\partial u_k(\xi', \xi, t)}{\partial t}.$$

Dla źródła ciepła $Q = \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t)$ oraz źródła $Q' = \delta(\mathbf{x} - \xi') \delta(t)$ mamy

$$\theta'(\xi, \xi', t) = \theta(\xi', \xi, t).$$

Jeśli w punkcie ξ umieścić skupioną i chwilową siłę $X_i = \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t) \delta_{ij}$, a w punkcie ξ' źródło ciepła $Q' = \delta(\mathbf{x} - \xi') \delta(t)$, to z równania (5.4) wynika następujący związek:

$$\theta(\xi', \xi, t) = -\frac{\eta\kappa}{\gamma} \frac{\partial u_j'(\xi, \xi', t)}{\partial t}.$$

Niech w nieograniczonej przestrzeni posuwa się w kierunku osi x_3 źródło ciepła $Q = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3 - vt)$ ze stałą prędkością v . Przyjmując, że w układzie przyczyn z «primami» $Q' = \delta(\mathbf{x} - \xi') \delta(t)$, to z (5.4) otrzymamy

$$\theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_0^t \theta'(0, 0, v\tau; \xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \tau) d\tau.$$

Powyższy wzór zezwala na wyznaczenie temperatury spowodowanej poruszającym się źródłem ciepła przy wykorzystaniu wyrażenia dla temperatury, wywołanej działaniem chwilowego, ale nie poruszającego się źródła ciepła.

Z równań (5.1), (5.2) względnie (5.3) otrzymać można postacie szczególne twierdzenia o wzajemności odnoszące się do klasycznej elastokinetiki i teorii naprężeń cieplnych.

Jeśli założyć, że odkształcenie odbywa się w warunkach adiabatycznych, to w równaniu (5.1) przyjmując należy $\theta = -\eta_T \kappa \varepsilon_{kk}$, $\theta' = -\eta_T \kappa \varepsilon'_{kk}$. Pozostaje wtedy równanie

$$(5.5) \quad \int_V (\bar{X}_i \bar{u}'_i - \bar{X}'_i \bar{u}_i) dV + \int_\Sigma (\bar{p}_i \bar{u}'_i - \bar{p}'_i \bar{u}_i) d\Sigma = 0.$$

Równanie (5.2) odpada, gdyż w elastokinetyce zakładamy, że w ciele nie występują źródła ciepła, a powierzchnia ciała jest termicznie izolowana.

W teorii naprężeń cieplnych pomijamy człon zawierający dylatację w równaniu przewodnictwa cieplnego. Pominiecie to jest formalnie równoważne z przyjęciem $\eta = 0$ w równaniu (5.2). W ten sposób otrzymamy równania

$$(5.6) \quad \int_V (\bar{X}_i \bar{u}'_i - \bar{X}'_i \bar{u}_i) dV + \int_\Sigma (\bar{p}_i \bar{u}'_i - \bar{p}'_i \bar{u}_i) d\Sigma + \gamma \int_V (\bar{\theta} \bar{e}' - \bar{\theta}' \bar{e}) dV = 0,$$

$$(5.7) \quad \int_V (\bar{Q} \bar{\theta}' - \bar{Q}' \bar{\theta}) dV + \kappa \int_\Sigma (\bar{\vartheta} \bar{\theta}'_{,n} - \bar{\vartheta}' \bar{\theta}_{,n}) d\Sigma = 0.$$

Równanie (5.6) zostało wyprowadzone przez W. M. MAJZIELA [27]. Równanie (5.7) jest równaniem o wzajemności dla klasycznego równania przewodnictwa cieplnego.

Rozpatrzmy jeszcze przypadek, w którym przyczyny $I = \{X_i, p_i, Q, \vartheta\}$ i skutki $C = \{u_i, \theta\}$ odnoszą się do zagadnienia sprzężonego termosprężystości, a przyczyny $I' = \{X'_i, p'_i, Q', \vartheta'\}$ i skutki $C' = \{u'_i, \theta'\}$ do zagadnienia niesprężonego. Zważywszy na różnicę w równaniach przewodnictwa cieplnego dla zagadnienia sprzężonego i niesprężonego

$$(5.8) \quad \bar{\theta}_{,kk} - \frac{p}{\kappa} \bar{\theta} - \eta p \bar{e} = -\frac{\bar{Q}}{\kappa}, \quad \bar{\theta}'_{,kk} - \frac{p}{\kappa} \bar{\theta}' = -\frac{\bar{Q}'}{\kappa},$$

otrzymamy zamiast równania (5.8) następujące równanie:

$$(5.9) \quad \int_V (\bar{Q}' \bar{\theta} - \bar{Q} \bar{\theta}') dV + \kappa \eta p \int_V \bar{\theta} \bar{e}' dV + \kappa \int_\Sigma (\bar{\vartheta} \bar{\theta}'_{,n} - \bar{\vartheta}' \bar{\theta}_{,n}) d\Sigma = 0.$$

Eliminując z równań (5.1) i (5.9) człon $\int_V \bar{\theta}' \bar{e} dV$ otrzymamy twierdzenie o wzajemności w postaci

$$(5.10) \quad \kappa \eta p \left[\int_V (\bar{X}_i \bar{u}'_i - \bar{X}'_i \bar{u}_i) dV + \int_\Sigma (\bar{p}_i \bar{u}'_i - \bar{p}'_i \bar{u}_i) d\Sigma + \gamma \int_V \bar{\theta} \bar{e}' dV \right] = \\ = \kappa \gamma \int_\Sigma (\bar{\vartheta}' \bar{\theta}_{,n} - \bar{\vartheta} \bar{\theta}'_{,n}) d\Sigma + \gamma \int_V (\bar{Q} \bar{\theta}' - \bar{Q}' \bar{\theta}) dV.$$

Przyjmijmy teraz, że w układzie z «primami» działa jedynie skupione i chwilowe źródło ciepła w punkcie ξ , a warunki brzegowe są jednorodne. Wstawiając zatem do równania (5.10) $Q' = \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t)$, $X'_i = 0$, $p'_i = 0$, $\vartheta' = 0$ na Σ , otrzymamy

$$(5.11) \quad \bar{\theta}(\xi, p) + \eta \kappa p \int_V \bar{\theta}(\xi, p) \bar{e}'(\mathbf{x}, \xi, p) dV(\mathbf{x}) = \bar{M}(\xi, p),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{M}(\xi, p) = & \int_V \bar{Q}(\mathbf{x}, p) \bar{\theta}'(\mathbf{x}, \xi, p) dV(\mathbf{x}) - \kappa \int_{\Sigma} \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) \bar{\theta}'_{,n}(\mathbf{x}, \xi, p) d\Sigma(\mathbf{x}) - \\ & - \frac{\eta \kappa p}{\gamma} \left[\int_{\Sigma} \bar{p}_i(\mathbf{x}, p) \bar{u}'_i(\mathbf{x}, \xi, p) d\Sigma(\mathbf{x}) + \int_V \bar{X}_i(\mathbf{x}, p) \bar{u}'_i(\mathbf{x}, \xi, p) dV(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcje u'_i , θ' są znane jako rozwiązania równań różniczkowych teorii naprężeń cieplnych, a funkcje $\bar{Q}$, $\bar{\theta}$, $\bar{p}_i$, $\bar{X}_i$ są dane, zatem funkcja $\bar{M}(\xi, p)$ jest znana. Równanie (5.11) jest niejednorodnym równaniem całkowym Fredholma drugiego rodzaju, w którym jako nieznana funkcja występuje temperatura θ . W analogiczny sposób można uzyskać i przemieszczenia.

Przedstawiony tu sposób postępowania zaproponowany przez V. IONESCU-CAZIMIR [25] został zastosowany do wyznaczenia funkcji Greena w nieograniczonym obszarze termosprężystym [28, 29].

6. Metody całkowania równań termosprężystości wynikające z twierdzenia o wzajemności

W elastostatyce wyprowadza się związek uzależniający przemieszczenie $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in V$, $t > 0$ wewnątrz ciała, od przemieszczeń u_i i obciążeń p_i na jego powierzchni. Związki te są znane jako twierdzenia Somigliana i Greena [30]. Poniżej podamy tego rodzaju twierdzenia rozszerzone na zagadnienia termosprężystości.

Założmy, że przyczyny wywołujące odkształcenia i temperaturę w ciele wyrażone są jedynie przez warunki brzegowe. Warunki początkowe przyjmiemy jako jednorodne. Równania opisujące ruch ciała mają postać

$$(6.1) \quad \sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{e} = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0.$$

Do równań tych dołączamy równania stanu

$$(6.2) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \gamma \theta) \delta_{ij}.$$

Rozpatrzmy drugi układ równań z «primami», odnoszący się do nieograniczonego ciała termosprężystego:

$$(6.3) \quad \sigma'_{ij,j} = \rho \ddot{u}'_i, \quad \theta'_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta}' - \eta \dot{e}' = -\frac{1}{\kappa} \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0$$

oraz równania Duhamela-Neumanna

$$(6.4) \quad \sigma'_{ij} = 2\mu \varepsilon'_{ij} + (\lambda \varepsilon'_{kk} - \gamma \theta') \delta_{ij}.$$

Na równaniach (6.1)–(6.4) wykonujemy transformację Laplace'a przy uwzględnieniu jednorodnych warunków początkowych, następnie odpowiednio dodajemy te równania i wykonujemy całkowanie po obszarze V .

Po szeregu przekształceń, które tu pomijamy, otrzymamy ostatecznie [31]

$$\begin{aligned} (6.5) \quad \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) = & -\frac{\eta \kappa p}{\gamma} \int_{\Sigma} [\bar{p}_i(\xi, p) \bar{u}'_i(\xi, \mathbf{x}, p) - \bar{p}'_i(\xi, \mathbf{x}, p) \bar{u}_i(\xi, p)] d\Sigma(\xi) - \\ & - \kappa \int_{\Sigma} [\bar{\theta}'(\xi, \mathbf{x}, p) \bar{\theta}_{,n}(\xi, p) - \bar{\theta}(\xi, p) \bar{\theta}'_{,n}(\xi, \mathbf{x}, p)] d\Sigma(\xi). \end{aligned}$$

Wzór ten można otrzymać również z twierdzenia o wzajemności (5.3) przyjmując, że $Q' = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t)$, $X_i = 0$, $X'_i = 0$, $Q = 0$.

Rozpatrzmy z kolei drugi układ równań

$$(6.6) \quad \sigma_{ij}^s = \rho \ddot{u}_i^s - \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta_{is}\delta(t),$$

$$(6.7) \quad \theta_{,jj}^s - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta}^s - \eta \dot{e}^s = 0,$$

$$(6.8) \quad \sigma_{ij}^s = 2\mu e_{ij}^s + (\lambda e_{kk}^s - \gamma \theta^s)\delta_{ij}.$$

Funkcje u_i^s , θ^s odnoszą się do nieograniczonego obszaru termosprężystego. Wywołane są one działaniem chwilowej siły skupionej $X'_i = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t)\delta_{is}$, zwróconej w kierunku osi x_s . Wstawiając $X'_i = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t)\delta_{is}$, $X_i = 0$, $Q = 0$, $Q' = 0$ do twierdzenia o wzajemności, otrzymamy następujące wyrażenie na przemieszczenia u_s [31]:

$$(6.9) \quad u_s(\mathbf{x}, p) = \int_{\Sigma} [\bar{p}_i(\boldsymbol{\xi}, p) \bar{u}_i^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) - \bar{p}_i^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) \bar{u}_i(\boldsymbol{\xi}, p)] d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) - \\ - \frac{\gamma}{\eta p} \int_{\Sigma} [\bar{\theta}_{,n}(\boldsymbol{\xi}, p) \bar{\theta}^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) - \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}, p) \bar{\theta}_{,n}^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p)] d\Sigma(\boldsymbol{\xi}).$$

Na równaniach (6.5) i (6.9) należy jeszcze wykonać odwrotną transformację Laplace'a. Prowadzi ona do wyrażeń spłotowych, których tu już nie wypisujemy.

Równania (6.5) i (6.9) stanowią uogólnienie równań Somigliana na zagadnienia termosprężystości. Za ich pomocą możemy wyrazić funkcje $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\theta(\mathbf{x}, t)$ $\mathbf{x} \in V$, $t > 0$ przez całki powierzchniowe, w których występują funkcje u_i , θ oraz ich pochodne.

Jeśli funkcje Greena $\bar{u}_i'$, $\bar{\theta}'$ oraz $\bar{u}_i^s$, $\bar{\theta}^s$ dobrać w ten sposób, aby odnosiły się do ciała zajmującego obszar V ograniczony powierzchnią Σ i przyjąć, że na Σ powinny być spełnione warunki brzegowe

$$\bar{u}_i' = 0, \quad \bar{\theta}' = 0, \quad \bar{u}_i^s = 0, \quad \bar{\theta}^s = 0 \text{ na } \Sigma,$$

to równania (6.5) i (6.9) uproszczą się do postaci

$$(6.10) \quad \theta(\mathbf{x}, p) = \kappa \int_{\Sigma} \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}, p) \bar{\theta}_{,n}'(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\eta \kappa p}{\gamma} \int_{\Sigma} \bar{p}_i'(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) \bar{u}_i(\boldsymbol{\xi}, p) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}),$$

$$(6.11) \quad u_s(\mathbf{x}, p) = - \int_{\Sigma} \bar{p}_i^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) \bar{u}_i(\boldsymbol{\xi}, p) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\gamma}{\eta p} \int_{\Sigma} \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}, p) \bar{\theta}_{,n}^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}).$$

Wzory te stanowią rozwiązanie pierwszego zagadnienia brzegowego, w którym na Σ dane są przemieszczenia u_i oraz temperatura θ . Gdyby funkcje $\bar{u}_i'$, $\bar{\theta}'$ oraz $\bar{u}_i^s$, $\bar{\theta}^s$ odnosiły się do ciała zajmującego obszar ograniczony V , na powierzchni Σ swobodny od obciążeń i temperatury, to do równań (6.5) i (6.9) należałoby wstawić

$$\bar{p}_i' = 0, \quad \bar{\theta}' = 0, \quad \bar{p}_i^s = 0, \quad \bar{\theta}^s = 0 \text{ na } \Sigma.$$

Wtedy wzory (6.5) i (6.9) przyjmą postać

$$(6.12) \quad \theta(\mathbf{x}, p) = -\frac{\eta \kappa p}{\gamma} \int_{\Sigma} \bar{p}_i(\xi, p) \bar{u}'_i(\xi, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\xi) + \kappa \int_{\Sigma} \bar{\theta}(\xi, p) \bar{\theta}'_{,n}(\xi, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\xi),$$

$$(6.13) \quad \bar{u}_s(\mathbf{x}, p) = \int_{\Sigma} \bar{p}_i(\xi, p) \bar{u}'_i(\xi, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\xi) + \frac{\gamma}{\eta p} \int_{\Sigma} \bar{\theta}(\xi, p) \bar{\theta}'_{,n}(\xi, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\xi)$$

i stanowią rozwiązanie drugiego zagadnienia brzegowego, w którym na powierzchni Σ dane są obciążenia p_i i temperatura θ . Jednakże stosowanie wzorów (6.10)–(6.13) jest ograniczone ze względu na trudności związane z uzyskaniem funkcji Greena u'_i , θ' , u''_i , θ'' , spełniających z góry dane warunki brzegowe. W sposób analogiczny do rozszerzonych wzorów Somigliana i Greena można skonstruować rozwiązanie równań termosprężystości dla mieszanych warunków brzegowych. Jeden ze sposobów, będący rozszerzeniem metody W. M. Majziela z teorii zagadnień cieplnych na zagadnienia termosprężystości, znajdujemy w uprzednio cytowanej pracy V. IONESCU-CAZIMIR [25]. Polega on na użyciu funkcji Greena spełniających od razu mieszane warunki brzegowe. Drugi sposób, obmyślony przez W. NOWACKIEGO [32], polega na wykorzystaniu pomocniczych funkcji Greena, spełniających ciągle warunki brzegowe, i sprowadzeniu zagadnienia do rozwiązania układu równań całkowych Fredholma pierwszego rodzaju.

7. Harmoniczne fale płaskie

W dyskusji najprostszego typu fali, harmoniczej fali płaskiej, od razu na jaw wychodzą istotne cechy rozprzestrzeniania się fal termosprężystych, ich charakter, prędkość propagacji fali, dyspersja i tłumienie fali. Na jaw wystąpią zasadnicze różnice między falami termosprężystymi a falami sprężystymi i cieplnymi [33 i 34].

Rozważmy falę płaską harmoniczną przesuwającą się w kierunku osi x_1 , wywołaną przyczyną natury mechanicznej czy cieplnej. Ponieważ przemieszczenia u_j i temperatura θ zależą jedynie od zmiennych x_1 i t , to równania przemieszczeniowe i równania przewodnictwa cieplnego, uwzględniając że

$$(7.1) \quad u_j = \operatorname{Re}[u_j^*(x_1, \omega) e^{-i\omega t}], \quad \theta = \operatorname{Re}[\theta^*(x_1, \omega) e^{-i\omega t}],$$

przyjmą następującą postać:

$$(7.2) \quad (\partial_1^2 + \sigma^2) u_1^* = m \partial_1 \theta^*, \quad (\partial_1^2 + q) \theta^* + \eta \kappa p \partial_1 u_1^* = 0, \\ (\partial_1^2 + \tau^2) u_2^* = 0, \quad (\partial_1^2 + \tau^2) u_3^* = 0,$$

gdzie

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad \tau^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad q = \frac{i\omega}{\kappa}.$$

Eliminując z dwu pierwszych równań temperaturę θ^* otrzymamy

$$(7.3) \quad [(\partial_1^2 + \sigma^2)(\partial_1^2 + q) + q \varepsilon \partial_1^2] u_1^* = 0, \quad (\partial_1^2 + \tau^2) u_2^* = 0, \quad (\partial_1^2 + \tau^2) u_3^* = 0.$$

Pierwsze równanie odnosi się do fali podłużnej, dwa następne do fal poprzecznych. Jeśli do dwu pierwszych równań (7.2) wstawić

$$u_1^* = u^\circ e^{ikx_1}, \quad \theta^* = \theta^\circ e^{ikx_1},$$

to otrzymamy zależności

$$\frac{u^\circ}{\theta^\circ} = \frac{mik}{\sigma^2 - k^2}, \quad \frac{\theta^\circ}{u^\circ} = -\frac{\eta q \kappa ik}{q - k^2}.$$

Po wyeliminowaniu z tych związków wielkości u°/θ° otrzymamy następujące równanie algebraiczne:

$$(7.4) \quad k^4 - k^2[\sigma^2 + q(1 + \varepsilon)] + q\sigma^2 = 0, \quad \varepsilon = \eta m \kappa,$$

z którego wyznaczmy pierwiastki

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \{ \sigma^2 + q(1 + \varepsilon) \pm [(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2]^{1/2} \}.$$

Pierwiastki te są funkcjami parametru ε : $k_1 = k_1(\varepsilon)$, $k_2 = k_2(\varepsilon)$. Dla $\varepsilon = 0$ mamy

$$k_1(0) = \lambda_1 = \sigma, \quad k_2(0) = \lambda_2 = \sqrt{q}.$$

Rozwiązaniem dwu pierwszych równań (7.2) są funkcje

$$(7.5) \quad \begin{aligned} u_1 = & u_+^\circ \exp[-i\omega t + ik_1 x_1] + u_-^\circ \exp(-i\omega t - ik_1 x_1) + \\ & + \frac{mik_2}{\sigma^2 - k_2^2} \{ \theta_+^\circ \exp(-i\omega t + ik_2 x_1) - \theta_-^\circ \exp(-i\omega t - ik_2 x_1) \}, \\ \theta = & \theta_+^\circ \exp(-i\omega t + ik_2 x_1) + \theta_-^\circ \exp(-i\omega t - ik_2 x_1) + \\ & + \frac{\eta \kappa q ik_1}{k_1^2 - q} \{ u_+^\circ \exp(-i\omega t + ik_1 x_1) - u_-^\circ \exp(-i\omega t - ik_1 x_1) \}. \end{aligned}$$

Fale poprzeczne dane są związkami

$$(7.6) \quad \begin{aligned} u_2 = & B_+ \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{c_2} \right) \right] + B_- \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{c_2} \right) \right], \\ u_3 = & C_+ \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{c_2} \right) \right] + C_- \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{c_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Posuwają się one z prędkością stałą $c_2 = \left(\frac{\mu_T}{\rho} \right)^{1/2}$. Fale te nie powodują zmian objętości i nie wywołują pola temperatury, towarzyszącego ruchowi falowemu.

Zespół równań (7.5) nazywać będziemy równaniami fal termosprężystych. Pierwsze równanie (7.5) przedstawia falę podłużną, drugie towarzyszącą tym falom temperaturę. Oznaczając przez v_β ($\beta = 1, 2$) prędkość fazową, a przez ϑ_β współczynnik tłumienia i wiążąc je z pierwiastkami równania (7.4) zależnościami

$$v_\beta = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k_\beta)}, \quad \vartheta_\beta = \operatorname{Im}(k_\beta), \quad \beta = 1, 2,$$

przekształcimy równania (7.5) do postaci

$$(7.7) \quad \begin{aligned} u_1 = & u_+^0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_1} \right) - \vartheta_1 x_1 \right] + u_-^0 \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_1} \right) + \vartheta_1 x_1 \right] + \\ & + \frac{mik_2}{\sigma^2 - k_2^2} \left\{ \theta_+^0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_2} \right) - \vartheta_2 x_1 \right] - \theta_-^0 \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_2} \right) + \vartheta_2 x_1 \right] \right\}, \\ \theta = & \theta_+^0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_2} \right) - \vartheta_2 x_1 \right] + \theta_-^0 \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_2} \right) + \vartheta_2 x_1 \right] + \\ & + \frac{\eta \kappa q i k_1}{k_1^2 - q} \left\{ u_+^0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_1} \right) - \vartheta_1 x_1 \right] - u_-^0 \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_1} \right) + \vartheta_1 x_1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Widoczne jest, że obie fale są tłumione i ulegają dyspersji, gdyż prędkości fazowe v_p zależą od częstotliwości ω . Fizyczne znaczenie fal (7.7) stanie się jasne, jeśli porównamy je z falami w ośrodku hipotetycznym, charakteryzowanym zerową wartością rozszerzalności liniowej α_t . Dla $\alpha_t = 0$, a zatem dla $\eta = 0$, $m = 0$ dwa pierwsze równania (7.2) przyjmą postać

$$(7.8) \quad (\partial_1^2 + \sigma^2) \hat{u}_1^* = 0, \quad (\partial_1^2 + q) \hat{\theta}^* = 0.$$

Rozwiązaniem tych równań są funkcje

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \hat{u}_1^* = & u_+^0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{c_1} \right) \right] + u_-^0 \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{c_1} \right) \right], \quad c_1 = \left(\frac{\lambda_T + 2\mu_T}{\varrho} \right)^{1/2}, \\ \hat{\theta}^* = & \theta_+^0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{\hat{v}_2} \right) - \hat{\vartheta}_2 x_1 \right] + \theta_-^0 \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{\hat{v}_2} \right) + \hat{\vartheta}_2 x_1 \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\hat{v}_2 = (2\kappa\omega)^{1/2}, \quad \hat{\vartheta}_2 = \left(\frac{\omega}{2\kappa} \right)^{1/2}.$$

Tutaj $\hat{u}_1^*$ przedstawia falę czysto sprężystą, posuwającą się w kierunku osi x_1 względnie $-x_1$ z prędkością stałą $\hat{v}_1 = c_1$. Fale te nie ulegają tłumieniu ani dyspersji. Drugie z równań (7.9) przedstawia falę czysto cieplną, doznającą tłumienia i dyspersji. Tłumienie charakteryzowane jest współczynnikiem $\hat{\vartheta}_2 = \text{Im}(\lambda_2) = (\omega/2\kappa)^{1/2}$.

Dyspersja ma tu miejsce, gdyż prędkość fazowa $\hat{v}_2 = \frac{\omega}{\text{Re}(\lambda_2)} = (2\kappa\omega)^{1/2}$ jest funkcją częstotliwości ω . Równania (7.7) przedstawiają zmodyfikowaną falę podłużną i zmodyfikowaną falę cieplną. Z porównania równań (7.7) i (7.9) wynika, że pierwiastek $k_1(\varepsilon)$ charakteryzuje postać quasi-sprężystą fali termospężystej, gdyż $k_1(0) = \sigma = \omega/c_1$ odnosi się do fali czysto sprężystej. Podobnie pierwiastek $k_2(\varepsilon)$ charakteryzuje postać fali quasi-cieplnej, podczas gdy $k_2(0) = \lambda_2 = \sqrt{q}$ odnosi się do czysto termicznej fali w ośrodku hipotetycznym. Interesujący jest fakt, że w zmodyfikowanej fali sprężystej [pierwsze równanie grupy (7.9)] występują obok siebie człony quasi-sprężyste

$$u_+^0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_1} \right) - \vartheta_1 x_1 \right], \quad u_-^0 \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_1} \right) + \vartheta_1 x_1 \right]$$

oraz człony quasi-termiczne

$$\theta_+^0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_2} \right) - \vartheta_2 x_1 \right], \quad \theta_-^0 \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_2} \right) + \vartheta_2 x_1 \right].$$

Podobny stan rzeczy występuje w zmodyfikowanej fali termicznej.

Należy omówić jeszcze pierwiastki k_1 , k_2 względnie wielkości ϑ_β , v_β , $\beta = 1, 2$. Wprowadzając nowe oznaczenia

$$\zeta = \frac{c_1}{\omega^*} k, \quad \omega^* = \frac{c_1^2}{\kappa}, \quad \chi = \frac{\omega}{\omega^*},$$

doprowadzimy równanie (7.4) do prostej postaci

$$(7.10) \quad \zeta^4 - \zeta^2[\chi^2 + i\chi(1 + \epsilon)] + i\chi^3 = 0.$$

Pierwiastki ζ_1 , ζ_2 tego równania są funkcjami parametrów ϵ i $\chi = \omega/\omega^*$. Wielkość $\epsilon = \eta m \kappa$ jest wielkością stałą, zależną od właściwości termicznych i mechanicznych materiałów, podczas gdy χ zmienia się ze zmianą częstotliwości ω . Wielkość ω^* jest wielkością charakterystyczną dla danego materiału.

Częstotliwość drgań wymuszonych ω jest ograniczona przez wielkość

$$\omega_c = 2\pi(c_1)_s \left(\frac{3\rho}{4\pi M} \right)^{1/2},$$

wynikającą z widma Debye'a dla fal podłużnych [35]. We wzorze M oznacza masę atomową materiału tworzącego ciało sprężyste, a $(c_1)_s = \left(\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho} \right)^{1/2}$, gdzie λ_s , μ_s są stałymi Lamégo dla stanu adiabatycznego.

Poniżej podajemy tabelę podstawowych wartości dla czterech metali

	Aluminium	Miedź	Stal	Ołów
$(c_1)_s$ cm/sek.	$6,32 \times 10^5$	$4,36 \times 10^5$	$5,80 \times 10^5$	$2,14 \times 10^5$
ϵ	$3,56 \times 10^{-2}$	$1,68 \times 10^{-2}$	$2,97 \times 10^{-4}$	$7,33 \times 10^{-3}$
ω^* sek. ⁻¹	$4,66 \times 10^{11}$	$1,73 \times 10^{11}$	$1,75 \times 10^{12}$	$1,91 \times 10^{11}$
ϑ_1^∞ cm. ⁻¹	$1,31 \times 10^4$	$3,29 \times 10^3$	$4,48 \times 10^3$	$3,27 \times 10^4$
ω_c sek. ⁻¹	$9,80 \times 10^{13}$	$7,55 \times 10^{13}$	$9,95 \times 10^{13}$	$3,69 \times 10^{13}$

W tabeli umieszczono również współczynnik tłumienia ϑ_1^∞ dla $\chi = \infty$, przy czym

$$\vartheta_1^\infty = \frac{1}{2} \frac{\epsilon \omega^*}{(c_1)_T}.$$

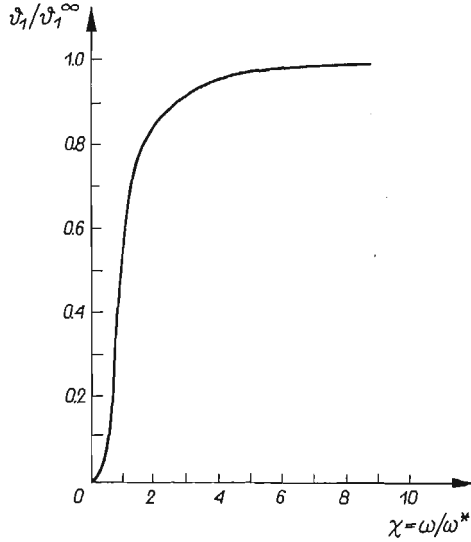
Zwróćmy uwagę, że ω_c jest znacznie większe niż ω^* . W wykonywanych doświadczeniach laboratoryjnych przy użyciu drgań ultradźwiękowych o bardzo dużej częstotliwości jest

$$\omega_c > \omega^* \gg \omega,$$

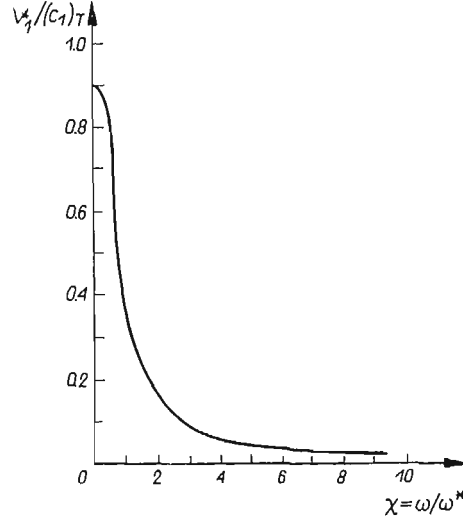
tak że dla drgań mechanicznych spotykanych w praktyce przyjąć można $\chi = \omega/\omega^* \ll 1$.

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono wykresy stosunków $v_1/(c_1)_T$ oraz $\vartheta_1/\vartheta_1^\infty$ dla miedzi w zależności od zmiennej $\chi = \omega/\omega^*$ [33].

Z rysunku 1 jest widoczne, że prędkość fazowa v_1 jest większa od $(c_1)_T$ i dąży do tej wartości dla $\chi \rightarrow \infty$. Współczynnik tłumienia ϑ_1 rośnie wraz z χ i przy małych częstotliwościach jest proporcjonalny do χ^2 , zbliżając się przy $\chi \rightarrow \infty$ do wartości asymptotycznej ϑ_1^∞ . W otoczeniu odciętej $\chi = 1$ ($\omega = \omega^*$) wielkości v_1 i ϑ_1 doznają gwałtownej zmiany. Ale dla zastosowań teorii w praktyce w rachubę



Rys. 1



Rys. 2

wchodzi jedynie mały obszar zmienności $\chi = \omega/\omega^*$. Dlatego też dla $\chi \ll 1$ pierwiastki ζ_1 , ζ_2 można rozłożyć w szereg potęgowy względem potęg χ i wykorzystać związek

$$\zeta_\beta = (c_1)_T \left(\frac{\chi}{v_\beta} + i \frac{\vartheta_\beta}{\omega^*} \right), \quad \beta = 1, 2.$$

W ten sposób otrzyma się przybliżone wartości prędkości fazowych oraz współczynników tłumienia. Podamy je za P. CHADWICKIEM [36]

$$(7.11) \quad v_1 = c_1(1+\varepsilon)^{1/2} \left[1 - \frac{\chi^2 \varepsilon (4-3\varepsilon)}{8(1+\varepsilon)^4} + 0(\chi^4) \right],$$

$$\vartheta_1 = \frac{\omega^*}{c_1(1+\varepsilon)^{1/2}} \left[\frac{\chi^2 \varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)^2} + 0(\chi^4) \right],$$

$$v_2 = c_1 \left(\frac{2\chi}{1+\varepsilon} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{\chi \varepsilon}{2(1+\varepsilon)^2} + \frac{\chi^2 \varepsilon (4+\varepsilon)}{8(1+\varepsilon)^4} + \frac{\chi^3 \varepsilon (8-20\varepsilon+\varepsilon^2)}{16(1+\varepsilon)^6} + 0(\chi^4) \right],$$

$$\vartheta_2 = \frac{\omega^*}{c_1} \left(\frac{\chi}{2(1+\varepsilon)} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{\chi \varepsilon}{2(1+\varepsilon)^2} + \frac{\chi^2 \varepsilon^2 (4-\varepsilon)}{8(1+\varepsilon)^4} + \frac{\chi^3 \varepsilon (8-12\varepsilon+\varepsilon^2)}{16(1+\varepsilon)^6} + 0(\chi^4) \right].$$

Widoczne jest, że dla $\chi \ll 1$ przyjąć można $v_1 \approx c_1(1+\varepsilon)^{1/2}$ jako wartość stałą, nieco większą niż $c_1 = (c_1)_T$ i falę quasi-sprężystą podłużną traktować jako tłumioną, ale nie podlegającą dyspersji.

Poniżej podamy rozwiązanie bardzo prostego przykładu fali płaskiej, dotyczące działania płaskiego źródła ciepła o intensywności Q_0 . Źródło to zmienia się w sposób harmoniczny w czasie i działa w płaszczyźnie $x_1 = 0$. Otrzymamy tu

$$(7.12) \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{mQ_0}{2\kappa} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left[\exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_1} \right) - \vartheta_1 x_1 \right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_2} \right) - \vartheta_2 x_1 \right] \right] \right\}, \quad x_1 > 0, \\ \theta &= \frac{Q_0}{2\kappa} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left[\frac{k_2^2 - \sigma^2}{ik_2} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_2} \right) - \vartheta_2 x_1 \right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{k_1^2 - \sigma^2}{ik_1} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_1} \right) - \vartheta_1 x_1 \right] \right] \right\}, \quad x_1 > 0. \end{aligned}$$

Prędkości fazowe v_p i współczynniki tłumienia ϑ_p bierzemy ze wzorów (7.11).

Gdyby pominąć sprzężenie pola odkształcenia i temperatury, tzn. jeśli w równaniu przewodnictwa cieplnego pominąć człon $\eta \dot{\epsilon}_{kk}$, to wstawiając zamiast $k_1(\epsilon)$, $k_2(\epsilon)$ wielkości $k_1(0) = \sigma$, $k_2(0) = \sqrt{q}$, otrzymamy z (7.12) rozwiązanie przybliżone teorii naprężeń cieplnych.

$$(7.13) \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{mQ_0}{2\kappa} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sigma^2 - q} \left[\exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{c_1} \right) \right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{\sqrt{2\kappa\omega}} \right) - x_1 \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right] \right] \right\}, \\ \theta &= \frac{Q_0}{2\kappa} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{\sqrt{q}} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{\sqrt{2\kappa\omega}} \right) - x_1 \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Przemieszczenie u_1 składa się z dwu części: z fali nietłumionej sprężystej, posuwającej się z prędkością c_1 oraz z fali dyfuzyjnej tłumionej i ulegającej dyspersji.

Do tej pory rozwiązano szereg zagadnień szczegółowych dotyczących rozprzestrzeniania się fal płaskich w przestrzeni i półprzestrzeni sprężystej. I tak I. N. SNEDDON [37] badał rozchodzenie się fali w pręcie półnieskończonym i skończonym, przy założeniu rozmaitych warunków brzegowych, a więc rozmaitych przyczyn wywołujących fale, rozpatrując dla pręta skończonego drganie wymuszone. W. NOWACKI [38] rozpatruje działanie płaskich sił masowych w przestrzeni nieograniczonej oraz działanie płaskich źródeł ciepła wymuszających drgania w warstwie termosprężystej [38].

Interesującym rezultatem jest tu niewystępowanie zjawiska rezonansu przy drganiach wymuszonych. Wynika to z charakteru ruchu falowego, który jest tłumiony. Przy drganiach wymuszonych otrzymujemy amplitudy o skończonej wartości. I tak dla przypadku warstwy o grubości a , wolnej od naprężeń i temperatury w płaszczyznach ograniczających warstwę $x_1 = 0, a$, poddanej działaniu źródeł ciepła $Q = Q^* \cos \omega t$ otrzymamy dla naprężenia $\sigma_{11}(x_1, t)$ następujące wyrażenie:

$$(7.14) \quad \sigma_{11} = \frac{mQ\omega^2}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n^* \{ a_n^2 (a_n^2 - \sigma^2) \cos \omega t - \xi [a_n^2 (1 + \epsilon) - \sigma^2] \sin \omega t \}}{a_n^4 (a_n^2 - \sigma^2)^2 + \xi^2 [a_n^2 (1 + \epsilon) - \sigma^2]^2} \sin a_n x_1,$$

gdzie

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \xi = \frac{\omega}{\kappa}, \quad Q_n^* = \frac{2}{a} \int_0^a Q^*(x_1) \sin \alpha_n x dx_1.$$

Nie otrzymamy tu rezonansu, gdyż mianownik pod znakiem sumy jest stale dodatni. W przypadku szczególnym $\alpha_r^2 = \sigma^2$, odpowiadającym rezonansowi dla zagadnienia niesprężonego, r -ty wyraz szeregu przyjmuje postać

$$(7.15) \quad \sigma_{11}^{(r)} = -\frac{\rho \omega m}{\varepsilon} \sin \omega t \frac{Q_r^* \sin \alpha_r x_1}{\alpha_r^2}.$$

Człon ten ma wartość skończoną, choć wielkość naprężenia $\sigma_{11}^{(r)}$ będzie znaczna, gdyż ε jest dla metali rzędu kilku procent.

8. Fale kuliste i walcowe

Rozpatrzmy równania falowe charakteryzujące podłużne fale termospłężyste, wyprowadzone w p. 3 [wzory (3.9) i (3.11)]

$$(8.1) \quad \square_1^2 \Phi = m\theta,$$

$$(8.2) \quad D\theta - \eta \nabla^2 \Phi = 0.$$

Jeśli założyć, że ruch falowy zmienia się w sposób harmoniczny w czasie, zatem gdy

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi^*(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad \theta(\mathbf{x}, t) = \theta^*(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t},$$

to z równań (8.1) i (8.2) otrzymamy następujące równania

$$(8.3) \quad (\nabla^2 + k_1^2)(\nabla^2 + k_2^2)(\Phi^*, \theta^*) = 0,$$

gdzie wielkości k_1, k_2 są pierwiastkami równania (7.4), dyskutowanymi w poprzednim punkcie.

Rozważmy te rozwiązania równania (8.3), które cechują się osobliwością w punkcie ξ i zależne są od promienia r , odległości punktu $\mathbf{x}$ od punktu ξ . Rozwiązania te, które oznaczmy przez $\varphi_\alpha^*(r)$ spełniają równania

$$(8.4) \quad \frac{d^2 \varphi_\alpha^*}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d\varphi_\alpha^*}{dr} + k_\alpha^2 \varphi_\alpha^* = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Tutaj $n=3$ odnosi się do zagadnienia trójwymiarowego, $n=2$ do zagadnienia dwuwymiarowego. W równaniu (8.4) nie należy wykonywać sumowania względem wskaźnika α .

Ogólne rozwiązanie równania (8.4) ma postać

$$(8.5) \quad \varphi_\alpha^*(r) = \frac{1}{r^m} [A H_m^{(1)}(k_\alpha r) + B H_m^{(2)}(k_\alpha r)], \quad m = \frac{n-2}{2}.$$

Tutaj $H_m^{(1)}$ i $H_m^{(2)}$ są funkcjami Hankela m -tego rzędu i pierwszego oraz drugiego rodzaju.

Dla $n = 3$ (zatem dla $m = 1/2$) mamy

$$H_{1/2}^{(1)}(k_\alpha r) = i \sqrt{\frac{2}{\pi k_\alpha}} \frac{e^{ik_\alpha r}}{r}, \quad H_{1/2}^{(2)}(k_\alpha r) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi k_\alpha}} \frac{e^{-ik_\alpha r}}{r}, \quad \alpha = 1, 2,$$

a rozwiązaniem równania (8.4) staje się funkcja

$$(8.6) \quad \varphi_\alpha^*(r) = A_1 \frac{e^{ik_\alpha r}}{r} + B_1 \frac{e^{-ik_\alpha r}}{r}, \quad r^2 = (x_j - \xi_j)(x_j - \xi_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

W przestrzeni nieograniczonej termosprężystej w rachubę wchodzi jedynie pierwszy człon równania (8.6), bowiem rozwiązanie

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\omega t} \frac{e^{ik_\alpha r}}{r} \right] = \frac{e^{-\vartheta_\alpha}}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v_\alpha} \right),$$

$$v_\alpha = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k_\alpha)}, \quad \vartheta_\alpha = \operatorname{Im}(k_\alpha)$$

przedstawia falę rozbieżną, rozchodzącą się z przyjętą fazą od początku układu $r = 0$ do nieskończoności. Tylko to rozwiązanie ma sens fizyczny. Dla fali walcowej przy $n = 2$ oraz $m = 0$ otrzymamy

$$(8.7) \quad \varphi_\alpha^*(r) = AH_0^{(1)}(k_\alpha r) + BH_0^{(2)}(k_\alpha r), \quad r^2 = (x_j - \xi_j)(x_j - \xi_j), \quad i, j = 1, 2.$$

Tutaj w rachubę wchodzi dla ośrodka nieograniczonego jedynie pierwszy człon związku (8.7), gdyż dla wielkich wartości argumentu otrzymamy wyrażenie

$$(8.8) \quad \operatorname{Re}[e^{-i\omega t} H_0^{(1)}(k_\alpha r)] \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi r k_\alpha}} \cos \left(k_\alpha r - \frac{\pi}{4} - \omega t \right) [1 + O(r^{-1})],$$

przedstawiające falę rozbieżną rozprzestrzeniającą się w kierunku wzrastających r .

W wyrażeniu (8.8) symbol $O(r^{-\alpha})$ oznacza taką wielkość x , że stosunek x/r^α pozostaje ograniczony przy $r \rightarrow \infty$. Rozwiązania tu przedstawione: $e^{ik_\alpha r}/r$, $H_0^{(1)}(k_\alpha r)$ spełniać powinny w nieskończoności tak zwane warunki wypromieniowania [38, 39 i 40]:

$$(8.9) \quad \begin{cases} n = 3: & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ik_\alpha r}}{r} \right) - ik_\alpha \frac{e^{ik_\alpha r}}{r} = e^{ik_\alpha r} O(r^{-2}), \quad \vartheta_\alpha > 0, \\ n = 2: & \frac{\partial}{\partial r} (H_0^{(1)}(k_\alpha r)) - ik_\alpha H_0^{(1)}(k_\alpha r) = e^{ik_\alpha r} O(r^{-3/2}), \quad \vartheta_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Wzory te informują o zachowaniu się rozwiązań podstawowych w otoczeniu punktu nieskończenie odległego.

Jeżeli rozważać będziemy taką klasę rozwiązań równań (8.3), które zachowywać się będą w nieskończoności w sposób podobny jak rozwiązania podstawowe $e^{ik_\alpha r}/r$, $H_0^{(1)}(k_\alpha r)$, to żądać należy od funkcji $\Phi^* = \Phi_1^* + \Phi_2^*$ spełnienia w nieskończoności następujących warunków:

$$(8.10) \quad \begin{cases} n = 3: & \frac{\partial \Phi_\alpha^*}{\partial r} - ik_\alpha \Phi_\alpha^* = e^{ik_\alpha r} O(r^{-2}), \quad \vartheta_\alpha \geq 0, \\ n = 2: & \frac{\partial \Phi_\alpha^*}{\partial r} - ik_\alpha \Phi_\alpha^* = e^{ik_\alpha r} O(r^{-3/2}), \quad \vartheta_\alpha \geq 0, \quad \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Do tych warunków dodać należy jeszcze warunek o skończonej wartości funkcji

$$\Phi_{\alpha}^* = 0(1) \quad \text{dla} \quad r \rightarrow \infty,$$

gdzie symbol $0(1)$ oznacza wielkość dowolnie małą.

Podłużne fale kuliste uzyskuje się jedynie przy szczególnym doborze zaburzeń. Powstają one wskutek działania źródeł ciepła i sił masowych pochodzenia potencjalnego w ośrodku nieograniczonym jak i ośrodku nieograniczonym z pustką kulistą przy warunkach brzegowych cechujących się symetrią względem punktu.

Rozpatrzmy jeden z tych przypadków, mianowicie działania skupionego źródła ciepła $Q_0 e^{-i\omega t} \delta(r)$. Rozwiązanie równania (8.3) przyjmujemy w postaci

$$(8.11) \quad \Phi^* = \frac{1}{r} (A_1 e^{ik_1 r} + A_2 e^{ik_2 r}),$$

gdzie stałe A_1, A_2 wyznaczmy z warunku, aby przepływ ciepła przez powierzchnię kuli przy $r \rightarrow 0$ był równy intensywności źródła ciepła, oraz aby $u_1^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial r}$ dla $r = 0$ było równe zeru. W rezultacie otrzymuje się dla funkcji Φ^*, θ^* następujące wzory [41]

$$(8.12) \quad \Phi^* = \frac{mQ_0}{4\pi\kappa r(k_2^2 - k_1^2)} \left\{ \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{v_1} \right) - \vartheta_1 r \right] - \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{v_2} \right) - \vartheta_2 r \right] \right\},$$

$$\theta^* = \frac{Q_0}{4\pi\kappa r(k_2^2 - k_1^2)} \left\{ (k_2^2 - \sigma^2) \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{v_2} \right) - \vartheta_2 r \right] - \right.$$

$$\left. - (k_1^2 - \sigma^2) \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{v_1} \right) - \vartheta_1 r \right] \right\}.$$

Tutaj ϑ_{α} jest współczynnikiem tłumienia, v_{α} prędkością fazową fali. Funkcje Φ^*, θ^* są tłumione, ulegają dyspersji, spełniają warunki wypromieniowania i wykazują osobliwość w punkcie $r = 0$.

Znajomość funkcji Φ^* zezwala na wyznaczenie przemieszczenia promieniowego $u_r = \partial \Phi / \partial r$. Dla $Q_0 = 1$ wzory (3.12) stają się funkcjami Greena dla potencjału $\hat{\Phi}^*$ i temperatury $\hat{\theta}^*$. Jeśli dany jest rozkład źródeł $Q(\mathbf{x}, t) = Q^*(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$ w ograniczonym obszarze V_1 , to potencjał Φ^* wyrazi się wzorem

$$(8.13) \quad \Phi^*(x, \omega) = \int_{V_1} Q^*(\xi) \hat{\Phi}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) dV(\xi).$$

Dotąd rozwiązano szereg przypadków szczególnych odnoszących się do fal kulistych. Odnoszą się one do działania centrum ściskania w obszarze nieograniczonym oraz do przestrzeni z pustką przy założeniu różnych warunków brzegowych, cechujących się symetrią kulistą [41 i 38].

Dla fal kulistych opracowano szereg twierdzeń, które można traktować jako rozszerzenie twierdzenia Helmholtza dla elastokinetyki i analogicznego twierdzenia teorii przewodnictwa cieplnego na zagadnienia termosprężystości [31]. Istota tego twierdzenia jest następująca. Dany jest układ równań

$$(8.14) \quad (\nabla^2 + \sigma^2)u^* - mv^* = 0, \quad (\nabla^2 + q)v^* + \frac{q\epsilon}{m} \nabla^2 u^* = 0,$$

regularnych w rozpatrywanym obszarze B . Tutaj u^* oznacza potencjał termosprężystego przemieszczenia, a v^* temperaturę. Wyeliminowanie z równań (8.14) funkcji v^* lub u^* prowadzi do równania typu (8.3).

Można wykazać, że jeśli na brzegu A obszaru B dane są funkcje u^* , v^* , $\partial u^*/\partial n$, $\partial v^*/\partial n$ to funkcja v^* w punkcie $\mathbf{x} \in B$ przedstawi się wzorem

$$(8.14) \quad v^*(\mathbf{x}) = \kappa \int_A \left[\theta^*(\xi, \mathbf{x}) \frac{\partial v^*(\xi)}{\partial n} - v^*(\xi) \frac{\partial \theta^*(\xi, \mathbf{x})}{\partial n} \right] dA(\xi) + \\ + \frac{\varepsilon q \sigma^2 \kappa}{m^2} \int_A \left[\Phi^*(\xi, \mathbf{x}) \frac{\partial u^*(\xi)}{\partial n} - u^*(\xi) \frac{\partial \Phi^*(\xi, \mathbf{x})}{\partial n} \right] dA(\xi), \quad \mathbf{x} \in B.$$

Tutaj funkcje $\theta^*(\mathbf{x}, \xi)$, $\Phi^*(\mathbf{x}, \xi)$ są rozwiązaniami równań

$$(8.15) \quad (\nabla^2 + \sigma^2) \Phi^* - m \theta^* = 0, \quad (\nabla^2 + q) \theta^* + \frac{q\varepsilon}{m} \nabla^2 \Phi^* = -\frac{1}{\kappa} \delta(\mathbf{x} - \xi), \quad \xi \in B,$$

gdzie

$$(8.16) \quad \Phi^* = \frac{m}{4\pi\kappa(k_2^2 - k_1^2)r} (e^{ik_1 r} - e^{ik_2 r}), \quad \theta^* = \frac{1}{4\pi\kappa(k_2^2 - k_1^2)} \frac{(n_2 e^{ik_2 r} - n_1 e^{ik_1 r})}{r}, \\ n_a = k_a^2 - \sigma^2, \quad a = 1, 2.$$

Dla $\mathbf{x} \in \mathcal{C} - B$, gdzie $\mathcal{C}$ jest całą przestrzenią, jest $v^*(\mathbf{x}) \equiv 0$. Dla zagadnienia niesprężonego ($\varepsilon = 0$), zatem dla teorii naprężeń cieplnych, odpada druga całka równania (8.14). W rezultacie otrzymuje się równanie

$$(8.17) \quad v^*(x) = \frac{1}{4\pi} \int_A \left[v^*(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ir} V_q}{r} \right) - \frac{e^{ir} V_q}{r} \frac{\partial v^*(\xi)}{\partial n} \right] dA(\xi), \quad r = r(\mathbf{x}, \xi),$$

a więc znane twierdzenie z teorii przewodnictwa cieplnego. Dla funkcji $u^*(\mathbf{x})$ otrzymuje się następujący wzór:

$$(8.18) \quad u^*(\mathbf{x}) = \kappa \int_A \left[\Phi^*(\xi, \mathbf{x}) \frac{\partial v^*(\xi)}{\partial n} - v^*(\xi) \frac{\partial \Phi^*(\xi, \mathbf{x})}{\partial n} \right] dA(\xi) + \\ + \frac{\kappa}{m} \int_A \left[\square_k^2 \Phi^*(\xi, \mathbf{x}) \frac{\partial u^*(\xi)}{\partial n} - u^*(\xi) \frac{\partial}{\partial n} (\square_k^2 \Phi^*(\xi, \mathbf{x})) \right] dA(\xi), \quad \mathbf{x} \in B, \\ u^*(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C} - B.$$

We wzorze tym wprowadzono symbol $\square_k^2 = \nabla^2 + k_1^2 + k_2^2 - \sigma^2$. Wzór (8.18) wyraża funkcję $u^*(\mathbf{x})$ wewnątrz obszaru B za pomocą funkcji

$$u^*(\xi), \quad \frac{\partial u^*(\xi)}{\partial n}, \quad v^*(\xi), \quad \frac{\partial v^*(\xi)}{\partial n}$$

na powierzchni A . Przy przejściu z termosprężystości do elastokinetyki otrzymuje się z (8.18) po szeregu przekształceń znane twierdzenie Helmholtza [42]

$$(8.19) \quad u^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_A \left[\frac{e^{i\sigma_1 r}}{r} \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{i\sigma_1 r}}{r} \right) \right] dA(\xi), & \mathbf{x} \in B, \\ 0, & \text{jeśli } \mathbf{x} \in \mathcal{E} - B. \end{cases}$$

Tutaj

$$\sigma_1 = \frac{\omega}{(c_1)_s}, \quad \text{gdzie } (c_1)_s = \left(\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho} \right)^{1/2}.$$

Fale walcowe powstać mogą w przypadku liniowego źródła ciepła lub też liniowego centrum ściskania bądź też w nieograniczonym ośrodku termosprężystym z pustką walcową, na której brzegu występuje ogrzanie, ciśnienie lub odkształcenie, rozłożone w sposób osiowo-symetryczny.

Z licznych rozwiązań [38, 41, 43] podamy tu tylko wynik końcowy odnoszący się do liniowego źródła ciepła $Q(r, t) = Q_0 e^{-i\omega t} \frac{\delta(r)}{2\pi r}$, $r = (x^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Dla amplitud potencjału termosprężystego przemieszczenia i dla temperatury otrzymuje się następujące wzory [41]:

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \frac{Q_0 m i}{4\kappa(k_2^2 - k_1^2)} [H_0^{(1)}(k_1 r) - H_0^{(1)}(k_2 r)], \\ \theta^* &= \frac{Q_0 i}{4\kappa(k_2^2 - k_1^2)} [(\sigma^2 - k_1^2) H_0^{(1)}(k_1 r) - (\sigma^2 - k_2^2) H_0^{(1)}(k_2 r)]. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Funkcje te spełniają warunki wypromieniowania. Są one tłumione i ulegają dyspersji.

9. Funkcje Greena dla nieograniczonego ośrodka termosprężystego. Osobliwe równanie całkowite termosprężystości

W poprzednim punkcie przedstawiono funkcje Greena dla punktowego i liniowego źródła ciepła. Spełniają one równania

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij,j} &= -\omega^2 \rho \hat{u}_i, \\ \hat{\theta}_{,kk} + h_3^2 \hat{\theta} + \frac{\gamma}{\alpha} \hat{u}_{k,k} &= -\frac{1}{\kappa} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Przez $\hat{u}$, $\hat{\theta}$ oznaczamy tu amplitudy przemieszczeń i temperatury. Z kolei wyznaczyć należy funkcje Greena dla siły skupionej. Niech w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ obszaru nieograniczonego działa siła skupiona $X_i = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta_{i1} e^{-i\omega t}$, zwrócona w kierunku osi x_1 . Działanie tej siły wywoła zarówno falę podłużną jak i poprzeczną. Rozwiązać należy układ równań

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^{(1)} &= -\omega^2 \rho u_i^{(1)} - \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta_{i1}, \\ \theta_{,kk}^{(1)} + h_3^2 \theta^{(1)} + \frac{\gamma}{\alpha} u_{k,k}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (9.2)$$

w których przez $\sigma_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ oznaczono amplitudę naprężeń, przemieszczeń oraz temperaturę wywołaną działaniem siły skupionej, działającej w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ i zwróconej w kierunku osi x_1 . Układ równań (9.2) zastąpić można układem równań falowych

$$(\nabla^2 + k_1^2)(\nabla^2 + k_2^2)\Phi^{(1)} = -\frac{1}{c_1^2}(\nabla^2 + q)\vartheta, \quad (9.3)$$

$$(\nabla^2 + \tau^2)\psi_i^{(1)} = -\frac{1}{c_2^2}\chi_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.4)$$

Równania te wynikają z równań (9.2) przy założeniu, że

$$(9.5) \quad \mathbf{u}^{(1)} = \text{grad } \Phi^{(1)} + \text{rot } \Psi^{(1)}; \quad \mathbf{X} = \varrho(\text{grad } \vartheta + \text{rot } \chi).$$

Amplitudę sił masowych wyznaczamy ze wzorów [44]

$$(9.6) \quad \begin{aligned} \vartheta(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi\varrho} \int_V \mathbf{X}(\mathbf{x}') \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}', \mathbf{x})} \right) dV(\mathbf{x}'), \\ \chi(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi\varrho} \int_V \mathbf{X}(\mathbf{x}') \times \text{grad}_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}', \mathbf{x})} \right) dV(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Dla rozważanego tu przypadku siły skupionej, zwróconej w kierunku osi x_1 , otrzymuje się

$$\vartheta = -\frac{1}{4\pi\varrho} \partial_1 \left(\frac{1}{r} \right), \quad \chi_1 = 0, \quad \chi_2 = \frac{1}{4\pi\varrho} \partial_3 \left(\frac{1}{r} \right), \quad \chi_3 = -\frac{1}{4\pi\varrho} \partial_2 \left(\frac{1}{r} \right).$$

Z rozwiązania równań (9.4) otrzymamy

$$(9.6) \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \frac{1}{4\pi\varrho\omega^2} \partial_3 F_0(r, \omega), \quad \psi_3 = -\frac{1}{4\pi\varrho\omega^2} \partial_2 F_0(r, \omega),$$

gdzie

$$F_0(r, \omega) = \frac{1}{r} (e^{i\tau r} - 1), \quad r^2 = (x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Z rozwiązania równania (9.3) przy uwzględnieniu faktu, że funkcja $\Phi^{(1)}$ odznacza się osiową symetrią względem osi x_1 , otrzymuje się [44 i 45]:

$$(9.7) \quad \Phi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\varrho\omega^2} \partial_1 F(r, \omega),$$

gdzie

$$\begin{aligned} F(r, \omega) &= A_1 I_1 - A_2 I_2 - I_0, \\ A_1 &= \frac{(k_1^2 - q)\sigma^2}{k_1^2(k_1^2 - k_2^2)}, \quad A_2 = \frac{(k_2^2 - q)\sigma^2}{k_2^2(k_1^2 - k_2^2)}, \quad I_0 = \frac{1}{r}, \quad I_\beta = \frac{e^{ik_\beta r}}{r}, \quad \beta = 1, 2. \end{aligned}$$

Temperaturę $\theta^{(1)}$ wyznacza się ze wzoru

$$(9.8) \quad \theta^{(1)} = \frac{1}{m} (\nabla^2 + \sigma^2) \Phi^{(1)} + \frac{1}{c_1^2 m} \vartheta.$$

Wykorzystując wzór (9.5) i (9.8) otrzymamy

$$(9.9) \quad u_j^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\varrho\omega^2} \partial_1 \partial_j [F(r, \omega) - F_0(r, \omega)] + \frac{1}{4\pi\varrho c_2^2} \delta_{ij} \frac{e^{i\tau r}}{r},$$

$$(9.10) \quad \theta^{(1)} = \frac{qe}{4\pi\varrho mc_1^2(k_1^2 - k_2^2)} \partial_1 [I_1(r, \omega) - I_2(r, \omega)].$$

Funkcje te mają osłabiwość w punkcie ξ i spełniają warunki wypromieniowania w nieskończoności. Jeśli siła skupiona działa w kierunku osi x_s , to otrzymamy następujące wyrażenie dla tensora przemieszczeniowego Greena u_j^s oraz temperatury θ^s :

$$(9.11) \quad u_j^s = -\frac{1}{4\pi\varrho\omega^2} \{ \partial_j \partial_s [F(r, \omega) - F_0(r, \omega)] - \tau^2 \delta_{js} e^{i\omega\tau} \},$$

$$(9.12) \quad \theta^s = \frac{qe}{4\pi\varrho mc_1^2(k_1^2 - k_2^2)} \partial_s [I_1(r, \omega) - I_2(r, \omega)], \quad j, s = 1, 2, 3.$$

Z otrzymanych rozwiązań dla siły skupionej uzyskać można dalsze osobliwości, wyrażenia u_j^s , θ^s dla siły podwójnej, dla momentu skupionego oraz dla centrum ściskania.

Dla zagadnienia dwuwymiarowego otrzymuje się dla siły skupionej i zwróconej w kierunku osi x_s , następujące funkcje Greena [46]:

$$(9.13) \quad u_j^s = -\frac{i}{4\rho\omega^2} \{ \partial_j \partial_s [A_1 H_0^{(1)}(k_1 r) - A_2 H_0^{(1)}(k_2 r) - H_0^{(1)}(er)] - \tau^2 \delta_{js} H_0^{(1)}(er) \},$$

$$(9.14) \quad \theta^s = \frac{q\epsilon i}{4\rho m c_1^2 (k_1^2 - k_2^2)} \partial_s [H_0^{(1)}(k_1 r) - H_0^{(1)}(k_2 r)],$$

$$r^2 = (x_j - \xi_j)(x_j - \xi_j), \quad j, s = 1, 2.$$

Znajomość funkcji przemieszczeniowych i temperatury dla działania skupionego źródła ciepła i siły skupionej zezwala na skonstruowanie metody całkowania równań termosprężystości dla ciała ograniczonego [31].

Wprowadzimy analogiczne do potencjałów elastokinetyki [39] potencjały powierzchniowe termosprężyste

$$(9.15) \quad V_s(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) u_k^s(\xi, \mathbf{x}) + 2\alpha \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \theta^s(\xi, \mathbf{x}),$$

$$V(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \theta(\xi) + \frac{2}{\alpha} \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) \hat{u}_k(\xi, \mathbf{x}).$$

Tutaj $\varphi_k = \varphi_k(\xi)$, $\psi(\xi)$ są nieznanymi gęstościami powierzchniowymi odpowiedniej regularności. Funkcje $\hat{u}_k$, $\hat{\theta}$, u_k^s , θ^s są funkcjami Greena, spełniającymi równania (9.1) i (9.2), funkcjami znanymi. Termosprężystym potencjałem warstwy podwójnej nazywa się układ

$$(9.16) \quad W_s(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) p_k^s(\xi, \mathbf{x}) + 2\alpha \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \frac{\partial \theta^s(\xi, \mathbf{x})}{\partial n},$$

$$W(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \frac{\partial \hat{\theta}(\xi, \mathbf{x})}{\partial n} + \frac{2}{\alpha} \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) \hat{p}_k(\xi, \mathbf{x}).$$

Wprowadzono tu oznaczenia

$$p_k^s(\xi, \mathbf{x}) = [2\mu \epsilon_{kj}^s + (\lambda u_{p,p}^s - \gamma \theta^s) \delta_{kj}] n_j,$$

$$\hat{p}_k(\xi, \mathbf{x}) = [2\mu \hat{\epsilon}_{kj} + (\lambda \hat{u}_{p,p} - \gamma \hat{\theta}) \delta_{kj}] n_j.$$

Wreszcie wykorzystywać można potencjał termosprężysty, będący kombinacją potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej

$$(9.17) \quad M_s(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) p_k^s(\xi, \mathbf{x}) + 2\alpha \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \theta^s(\xi, \mathbf{x}),$$

$$M(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \hat{\theta}(\xi, \mathbf{x}) + \frac{2}{\alpha} \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) \hat{p}_k(\xi, \mathbf{x}).$$

Wykazuje się, że potencjały $V_s(\mathbf{x})$, $V(\mathbf{x})$ są funkcjami ciągłymi punktów $\mathbf{x} \in \Sigma$. Natomiast potencjały warstwy podwójnej $W_s(\mathbf{x})$, $W(\mathbf{x})$ wykazują nieciągłość na tej powierzchni. Mamy bowiem

$$(9.18) \quad W_s^{(i)}(\xi_0) = -\varphi_s(\xi_0) + W_s(\xi_0), \quad W^{(i)}(\xi_0) = -\psi(\xi_0) + W(\xi_0),$$

$$W_s^{(e)}(\xi_0) = \varphi_s(\xi_0) + W_s(\xi_0), \quad W^{(e)}(\xi_0) = \psi(\xi_0) + W(\xi_0).$$

Funkcje $W_s(\xi_0)$, $W_s^{(i)}(\xi_0)$ oraz $W_s^{(e)}(\xi_0)$ oznaczają kolejno granicę wektora $W_s(\xi)$ dla $\xi \rightarrow \xi_0 \in \Sigma$ po powierzchni Σ , $W_s(\xi)$ dla $\xi \rightarrow \xi_0 \in \Sigma$ od wnętrza obszaru V oraz $W_s(\xi)$ dla $\xi \rightarrow \xi_0 \in \Sigma$ przy $\xi \in \mathcal{C} - V$. Wykazuje się, że pierwsza całka powierzchniowa we wzorach (9.16) przedstawia funkcję nieciągłą, druga funkcję ciągłą.

Wprowadźmy dalej oznaczenia

$$(9.19) \quad \begin{aligned} \check{p}_i(\mathbf{x}) &= [2\mu V_{(i,j)} + \lambda(V_{k,k} - \gamma V)\delta_{ij}]n_j(\mathbf{x}), \\ \check{\theta}(\mathbf{x}) &= V_{,k}n_k(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

gdzie V_s , V przedstawione są wzorami (9.15). Można wykazać, że

$$(9.20) \quad \begin{aligned} \check{p}_k^{(i)}(\xi_0) &= \varphi_k(\xi_0) + \check{p}_k(\xi_0), & \check{\theta}^{(i)}(\xi_0) &= \psi(\xi_0) + \check{\theta}(\xi_0), \\ \check{p}_k^{(e)}(\xi_0) &= -\varphi_k(\xi_0) + \check{p}_k(\xi_0), & \check{\theta}^{(e)}(\xi_0) &= -\psi(\xi_0) + \check{\theta}(\xi_0). \end{aligned}$$

Potencjały termosprężyste (9.15)–(9.17) oraz relacje dotyczące nieciągłości tych potencjałów pozwalają na redukcję podstawowych zagadnień brzegowych do rozwiązania układu osobliwych równań całkowych.

Rozpatrzmy przypadek danych na brzegu Σ przemieszczeń $u_s(\xi_0) = f_s(\xi_0)$ oraz temperatury $\theta(\xi_0) = g(\xi_0)$. Rozwiązania zagadnienia poszukuje się w postaci potencjału warstwy podwójnej (9.16), przyjmując

$$U_s(\mathbf{x}) = W_s(\mathbf{x}), \quad \theta(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}).$$

Łatwo sprawdzimy, że funkcje $U_s(\mathbf{x})$, $\theta(\mathbf{x})$ spełniają równania

$$(9.21) \quad L_{sk}U_k - \gamma \partial_s \theta = 0, \quad (\nabla^2 + q)\theta + \frac{\varepsilon}{m} \partial_k U_k = 0, \quad \mathbf{x} \in V,$$

gdzie

$$L_{sk} = (\mu \partial_p \partial_p + \omega^2 \varrho) \delta_{sk} + (\lambda + \mu) \partial_s \partial_k.$$

Biorąc pod uwagę związki (9.18) dla funkcji $\varphi_k(\xi)$, $\psi(\xi)$ otrzymuje się następujący układ sprzężonych równań całkowych:

$$(9.22) \quad \begin{aligned} \varphi_s(\xi_0) - 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) p_k^s(\xi, \xi_0) - 2\alpha \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \frac{\partial \theta^s(\xi, \xi_0)}{\partial n} &= -f_s(\xi_0), \\ \psi(\xi_0) - 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \frac{\partial \hat{\theta}(\xi, \xi_0)}{\partial n} - \frac{2}{\alpha} \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) \check{p}_k(\xi, \xi_0) &= -g(\xi_0). \end{aligned}$$

Równania te mają postać osobliwych równań całkowych drugiego rodzaju, a całki w nich występujące należy rozumieć w sensie wartości głównych. Jeśli na brzegu Σ dane są przemieszczenia $u_i(\xi_0) = f_i(\xi_0)$ oraz przepływ ciepła $\partial \theta / \partial n|_{\xi=\xi_0} = S(\xi_0)$, to rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci

$$U_s(\mathbf{x}) = M_s(\mathbf{x}), \quad \theta(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V,$$

gdzie funkcje M_s , M są dane wzorami (9.17). Sprawdzimy łatwo, że wewnątrz obszaru V spełnione są równania (9.21), a niewiadome gęstości spełniają układ równań osobliwych całkowych

$$(9.23) \quad \varphi_s(\xi_0) - 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) p_k^s(\xi, \xi_0) - 2\alpha \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \theta^s(\xi, \xi_0) = -f_s(\xi_0),$$

$$\psi(\xi_0) + 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \frac{\partial \hat{\theta}(\xi, \xi_0)}{\partial n_0} + \frac{2}{\alpha} \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) \frac{\partial \hat{p}_k(\xi, \xi_0)}{\partial n_0} = S(\xi_0),$$

gdzie

$$\frac{\partial \hat{\theta}(\xi, \xi_0)}{\partial n_0} = \lim_{x \rightarrow \xi_0} \frac{\partial}{\partial n_x} \hat{\theta}(\xi, x), \quad \text{gdy } x \in \Sigma.$$

Analogicznie zdefiniowana jest wielkość $\partial \hat{p}(\xi, \xi_0)/\partial n_0$. Zauważmy wreszcie, że jeśli na Σ dane jest obciążenie $p_i = p_i(\xi_0)$ oraz strumień ciepła $S = S(\xi_0)$, to rozwiązanie należy poszukiwać przy użyciu potencjałów warstwy pojedynczej $V_s(x)$, $V(x)$. Badanie istnienia i jednoznaczności otrzymanych osobliwych równań przeprowadza się w podobny sposób, jak to ma miejsce w elastodynamice. Przedstawione tu układy równań całkowych osobliwych zawierają w sobie przypadki szczególne, odnoszące się do teorii naprężeń cieplnych, teorii przewodnictwa cieplnego oraz elastodynamiki.

Równolegle z rozwojem ogólnej teorii propagacji fal termosprężystych, harmonicznym zmieniających się w czasie, rozwiązano szereg zagadnień szczegółowych, doprowadzając je do postaci przydatnej do dyskusji. Przeważnie są to zagadnienia typowe dla elastokinetyki klasycznej, które w ramach termosprężystości doznały rozszerzenia i uogólnienia. Sporo uwagi poświęcono falom powierzchniowym. Zagadnienie to dyskutowane było najpierw w pracy F. J. LOCKETTA [47], a później w sposób szerszy i bardziej wnikliwy w pracy P. CHADWICKA i D. W. WINDLE'A [49].

Przy wyprowadzeniu fal powierzchniowych w płaskim stanie odkształcenia wychodzi się z równań falowych (dla fali podłużnej i poprzecznej) oraz równania przewodnictwa cieplnego. Fala posuwa się równolegle do płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń i zanika wraz z głębokością. Przyjmuje się, że w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń zanikają naprężenia i temperatura względnie naprężenia i przepływ ciepła. Z wyznacznika układu równań wyrażających jednorodne warunki brzegowe otrzymuje się równanie algebraiczne trzeciego stopnia o zespolonych współczynnikach. Jeden z pierwiastków tego równania, spełniający przepisane nierówności, daje prędkość fazową fali powierzchniowej. Okazuje się, że fala powierzchniowa doznaje tłumienia oraz dyspersji, prędkość jej jest mniejsza od prędkości fali podłużnej i poprzecznej.

W podobny sposób W. NOWACKI i M. SOKOŁOWSKI [51] zbadali propagację fali harmonicznnej w warstwie termosprężystej. Rozpatrzono tu tak symetryczną jak i antysymetryczną (fala giętna) postać fali i to przy dwu warunkach termicznych na brzegu: $\theta = 0$ oraz $\theta_{,n} = 0$. Ze względu na małość parametru ε , charakteryzującego ośrodek termosprężysty, podano rozwiązanie przybliżone równania przestępnego stosując metodę perturbacji.

Propagacją fal harmoniczych w nieskończonym walcu kołowym i w rurze grubościenną zajął się F. J. LOCKETT [50] podając przynależne do tego zagadnienia równania przestępne. J. IGNACZAK i W. NOWACKI [52] rozpatrzyli drgania wymuszone walca nieskończonego o przekroju prostokątnym. Przyczyną wymuszających drgania były tu ogrzania powierzchni walca oraz działanie źródeł ciepła. W pracy [53] ci sami autorzy podali metodę oraz rozwiązanie zagadnienia drgań wymuszonych podłużnych tarcz i drgań giętnych płyt, wywołanych działaniem obciążeń i ogrzania. Analogicznym zagadnieniem poświęcona jest praca P. CHADWICKA [54].

Dalszym zagadnieniem rozwiązany, to propagacja fali płaskiej termosprężystej w nieograniczonym ośrodku z pustką kulistą i walcową [40]. Chodzi tu o rzecz następującą. Płaska fala wywołana działaniem płaskiego źródła ciepła posuwa się w przestrzeni nieograniczonej i natrafia na pustkę kulistą lub walcową. Obmywając tę pustkę pole temperatury doznaje zaburzenia, w otoczeniu pustki następuje spiętrzenie temperatury i naprężeń. Uzyskano tu rozwiązanie częściowe w postaci zamkniętej oraz rozwiązanie resztkowe, wyrażające się nieskończonym układem równań algebraicznych o zespolonych współczynnikach.

Spora grupa rozwiązań odnosi się do tzw. zagadnienia Lamba elastokinetiki klasycznej. Chodzi tu o rozpatrzenie wpływu obciążeń i ogrzań działających na półprzestrzeń termosprężystą. Rozwiązano tu dwa typowe zagadnienia, mianowicie gdy obciążenie czy też ogrzanie jest osiowo symetryczne oraz gdy obciążenie i ogrzanie wywołuje płaski stan odkształcenia [43]. Z tymi zagadnieniami spokrewnione są dalsze, dotyczące działania źródeł ciepła (skupionego i liniowego) w półprzestrzeni sprężystej [41]. Jednak rozwiązania tej grupy mają jedynie charakter formalny — dotąd nie udało się uzyskać nawet rozwiązań przybliżonych, przydatnych do dyskusji.

10. Zagadnienia aperiodyczne termosprężystości

Wymieniona tu dziedzina badań jest najmniej rozwiniętym działem termosprężystości. Spowodowane to jest wielkimi trudnościami matematycznymi rozwiązania.

Przy rozwiązywaniu zagadnień aperiodycznych termosprężystości stosowane są na ogół trzy drogi. Pierwsza polega na wyeliminowaniu z równań różniczkowych termosprężystości

$$(10.1) \quad \begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i &= \rho \ddot{u}_i + \gamma \theta_{,i}, \\ \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{e} &= -\frac{Q}{\kappa} \end{aligned}$$

czasu t przez wykonanie na tych równaniach transformacji Laplace'a względnie transformacji Fouriera względem czasu t . Pierwsza z wymienionych transformacji jest najczęściej stosowaną ze względu na obszerny zbiór transformacji odwrotnych. Dokonując zatem na (10.1) transformacji Laplace'a, określonej związkiem

$$\mathcal{L}(u_i, \theta) = (\bar{u}_i, \bar{\theta}) = \int_0^\infty (u_i, \theta) e^{-pt} dt, \quad p > 0$$

i zakładając jednorodność warunków początkowych uzyskamy z (10.1) następujące przetransformowane równania:

$$(10.2) \quad \begin{aligned} \mu \bar{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \bar{u}_{i,jj} + \bar{X}_i &= \rho p^2 \bar{u}_i + \gamma \bar{\theta}_{,i}, \\ \bar{\theta}_{,jj} - \frac{p}{\kappa} \bar{\theta} - \eta p \bar{u}_{i,j} &= -\frac{\bar{Q}}{\kappa}. \end{aligned}$$

Tutaj nieznane funkcje $\bar{u}_i$, $\bar{\theta}$ są funkcjami położenia $\mathbf{x}$ i parametru transformacji p . Rozwiązanie równań (10.2) nie nastręcza dla wielu zadań szczególnych, większych trudności; są one tego samego rzędu jak w zagadnieniach drgań harmonicznie zmiennych w czasie. Istotną trudność leży tu w wykonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a na uzyskanych rozwiązaniach $\bar{u}_i(\mathbf{x}, p)$, $\bar{\theta}(\mathbf{x}, p)$.

Druga droga rozwiązania polega na wykonaniu na równaniach (10.1) potrójnej transformacji całkowej Fouriera względem zmiennych x_i . W ten sposób doprowadza się równania (10.1) do układu równań różniczkowych zwyczajnych, w których czas występuje jako zmienna niezależna. Po rozwiązaniu tego równania wykonuje się odwrotną potrójną transformację Fouriera [56].

Trzecia droga chętnie stosowana dla przestrzeni i półprzestrzeni termosprężystej polega na stosowaniu poczwórnej transformacji Fouriera. Układ równań (10.1) sprowadza się do układu czterech równań algebraicznych dla transformat $\bar{u}$, $\bar{\theta}$. Poczwórna transformacja odwrotna prowadzi tu do ostatecznego wyniku [65 i 66].

Każda z tych dróg związana jest z dużymi trudnościami matematycznymi; są one tak wielkie, że dotąd nie uzyskano żadnego rozwiązania w postaci zamkniętej.

Rozpatrzmy nieco szczegółowiej równania falowe (3.9) i (3.11) wywodzące się z równań (10.1). Jeśli stosować pierwszą drogę postępowania i na równaniach falowych wykonać transformację Laplace'a przy założeniu jednorodnych warunków brzegowych, to otrzymamy układ równań

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \left[\left(\nabla^2 - \frac{p^2}{c_1^2} \right) \left(\nabla^2 - \frac{p}{\kappa} \right) - \frac{\varepsilon p}{\kappa} \nabla^2 \right] \bar{\Phi} &= -\frac{m}{\kappa} \bar{Q} - \frac{1}{c_1^2} \left(\nabla^2 - \frac{p}{\kappa} \right) \bar{\vartheta}, \\ \left(\nabla^2 - \frac{p^2}{c_2^2} \right) \bar{\psi}_i &= -\frac{1}{c_2^2} \bar{\chi}_i, \\ \bar{\theta} &= \frac{1}{m} \left(\nabla^2 - \frac{p^2}{c_1^2} \right) \bar{\Phi}, \quad \varepsilon = \eta m \kappa, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Równanie fali podłużnej przy $Q = 0$, $\vartheta = 0$ przedstawić możemy w postaci

$$(10.4) \quad (\nabla^2 - \lambda_1^2)(\nabla^2 - \lambda_2^2) \bar{\Phi} = 0,$$

gdzie λ_1 , λ_2 są pierwiastkami równania bikwadratowego:

$$\lambda^4 - \lambda^2 p \left[\frac{p}{c_1^2} + \frac{1}{\kappa} (1 + \varepsilon) \right] + \frac{p^3}{\kappa c_1^2} = 0.$$

Ponieważ pierwiastki tego równania

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p}{\kappa} (1 + \varepsilon) + \frac{p^2}{c_1^2} \pm \left[\left(\frac{p}{\kappa} (1 + \varepsilon) + \frac{p^2}{c_1^2} \right)^2 - \frac{4p^3}{\kappa c_1^2} \right]^{1/2} \right\},$$

wyrażają się w sposób nader złożony jako funkcje parametru p , to widocznym się staje, że wykonanie odwrotnej transformacji Laplace'a na funkcjach $\bar{\Phi}$, $\bar{\theta}$ natrafia na wielkie trudności. Z konieczności zwrócić się trzeba do rozwiązań przybliżonych. Na ogół stosuje się dwie drogi przybliżonego rozwiązania. Pierwsza polega na wykorzystaniu faktu, że wielkość $\varepsilon = \eta m \kappa$ jest mała ($\varepsilon \ll 1$) i że można ją traktować jako mały parametr [36]. Przedstawiając zatem funkcje Φ i θ szeregiem potęgowym względem ε :

$$(10.5) \quad \Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots, \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots,$$

doprowadzimy równanie (10.3) do układu równań

$$(10.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \bar{\Phi}_0 &= -\frac{m}{\kappa} \bar{Q} - \frac{1}{c_1^2} \mathcal{D}_2 \bar{\Phi}, \\ \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \bar{\Phi}_1 &= \frac{p}{\kappa} \nabla^2 \bar{\Phi}_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathcal{D}_1 = \nabla^2 - \frac{p^2}{c_1^2}, \quad \mathcal{D}_2 = \nabla^2 - p/\kappa.$$

Dla temperatury $\bar{\theta}$ otrzymamy

$$(10.7) \quad \bar{\theta} = \frac{\mathcal{D}_1}{m} (\bar{\Phi}_0 + \varepsilon \bar{\Phi}_1 + \varepsilon^2 \bar{\Phi}_2 + \dots).$$

Przy stosowaniu metody perturbacji wystarczy dla celów praktycznych ograniczyć się do dwu członów szeregu (10.5).

Zauważmy jeszcze, że funkcje Φ_0 , θ_0 odnoszą się do zagadnienia niesprężonego.

Inny wariant metody perturbacyjnej polega na rozwiązaniu równań (10.3), a następnie na rozwinięciu funkcji zawierających wielkości $k_1(\varepsilon, p)$, $k_2(\varepsilon, p)$ w szereg potęgowy względem parametru ε . Wariant ten z powodzeniem został zastosowany przez R. B. HETNARSKIEGO [55 i 61] przy rozwiązywaniu szeregu zagadnień odnoszących się do przestrzeni i półprzestrzeni termosprężystej.

Druga droga rozwiązania przybliżonego polega na określeniu funkcji Φ , θ dla małych czasów. Rozwiązania tego typu są bardzo użyteczne, gdyż istotna różnica między zagadnieniem dynamicznym i quasi-statycznym istnieje dla małych czasów t . Ze wzrostem czasu różnica ta zanika.

W myśl twierdzenia ABELA

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \mathcal{L}[f(t)],$$

małym czasom odpowiadają wielkie wartości parametru p w transformatach Laplace'a. Należy zatem w rozwiązaniach równań (10.2) czy też równań (10.3) rozwinąć wyrażenie zawierające wielkości $k_1(\varepsilon, p)$, $k_2(\varepsilon, p)$ według potęg $1/p$, zatrzymując kilka członów tego rozwinięcia. Wykonanie odwrotnej transformacji Laplace'a daje ostatecznie przybliżone rozwiązanie zadania.

Prace dotyczące propagacji fal aperiodycznych są nieliczne i odnoszą się do układów najprostszych, do przestrzeni i półprzestrzeni sprężystej. I tak zagadnieniem działania chwilowego i ciągłego skupionego źródła ciepła w nieograniczonej przestrzeni termosprężystej zajął się R. B. HETNARSKI [55 i 61] stosując tak metodę perturbacji, jak i małych czasów. Zagadnienie działania chwilowej i skupionej siły działającej w przestrzeni rozpatrzone było przez E. SOÓSA [17]. Wpływem warunków początkowych na propagację fal termosprężystych w przestrzeni nieograniczonej zajął się W. NOWACKI [57].

Z przedstawionymi tu zagadnieniami spokrewnione jest zagadnienie wyznaczenia pola odkształcenia i temperatury wokół pustki kulistej w przestrzeni nieograniczonej. Zagadnienie nagłego obciążenia brzegu ciała z pustką było przedmiotem dwu prac. W pierwszej M. LESSEN [58] stosuje metodę perturbacji, w drugiej P. CHADWICK [36] przedstawia zastosowanie metody asymptotycznej dla małych czasów.

Zagadnieniem nagłego ogrzania brzegu ciała z pustką kulistą zajął się G. A. NARIBOLI [59] stosując metodę perturbacji. Z uzyskanych rozwiązań przybliżonych wynika, że fale termosprężyste doznają dyspersji i tłumienia. Wpływ sprężenia pola odkształcenia i temperatury jest nieznaczny. Rozwiązania ilościowo niewiele odbiegają od rozwiązań otrzymanych w ramach teorii naprężeń cieplnych.

Drugim ważnym problemem, któremu poświęcono kilka prac, to propagacja fali płaskiej w półprzestrzeni termosprężystej, wywołana nagłym ogrzaniem płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń. Chodzi tu o uogólnienie znanego z teorii naprężeń cieplnych «zagadnienia Daniłowskiej». Problem ten podjął R. B. HETNARSKI [60 i 61] przy użyciu metody perturbacyjnej oraz przy wykorzystaniu twierdzenia Abela dla małych czasów. Ten sam problem podjęli B. A. BOLEY i I. S. TOLINS [62] oraz R. MUKI i S. BREUER [63]. Działanie ogrzania punktowego półprzestrzeni termosprężystej było przedmiotem pracy G. PARI [64].

Propagacji fali podłużnej w półprzestrzeni sprężystej i w przecie nieskończonym i półnieskończonym poświęcone były prace I. N. SNEDDONA [37] oraz J. IGNACZAKA [56]. W tej ostatniej pracy zastosowano najpierw transformację Fouriera względem zmiennej miejsca i dalej rozwiązano równanie różniczkowe zwyczajne trzeciego rzędu względem czasu. Rozwiązanie tego równania oraz wykonanie odwrotnej transformacji Fouriera doprowadziło do ostatecznego wyniku.

Na zakończenie tego przeglądu przedstawić należy dalsze kierunki rozwojowe termosprężystości.

Wydaje się, że można oczekiwać uzyskania dalszych ogólnych twierdzeń, stanowiących uogólnienie znanych twierdzeń z elastodynamiki. Chodzi tu o uogólnienie twierdzeń KIRCHHOFFA, WEBERA i VOLTERRA. Czyni się również próby [72] uzyskania dalszych, obszerniejszych twierdzeń wariacyjnych. Dalsze badania pójdą również w kierunku uwolnienia się od ograniczenia małych odkształceń, a więc w kierunku rozwijania nieliniowej geometrycznie termosprężystości. Innym kierunkiem — to odstępianie od ograniczenia $|\theta/T_0| \ll 1$, a więc badania ciał o podwyższonych temperaturach, gdy współczynniki termiczne i mechaniczne są funkcjami temperatury. Ostatnio zapoczątkowane zostały badania w dziedzinie powiązania pola odkształcenia, temperatury oraz pola elektrycznego w piezoelektrykach [73, 74

i 75]. Interesującym jest również zapoczątkowany kierunek magneto-termosprężystości [76–81]. Chodzi tu o badanie pola odkształcenia, pola temperatury oraz pola elektrodynamicznego w przewodnikach elektrycznych w obecności silnego, pierwotnego pola magnetycznego.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Literatura

1. J. M. C. DUHAMEL, *Second mémoire sur les phénomènes thermomécaniques*, J. de l'Ecole Polytechn., **15** (1837), 1–15.
2. W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner, 1910.
3. H. JEFFREYS, *The thermodynamics of an elastic solid*, Proc. Camb. Phil. Soc., **26** (1930).
4. M. A. BIOT, *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*, J. Appl. Phys., **27** (1956).
5. S. R. DE GROOT, *Thermodynamics of irreversible processes*, Amsterdam 1952.
6. B. A. BOLEY, J. H. WEINER, *Theory of thermal stresses*, John Wiley, New York 1960.
7. J. F. NEY, *Własności fizyczne kryształów*, PWN, 1962.
8. W. NOWACKI, *Some dynamic problems in thermoelasticity*, Arch. Mech. Stos., **1**, **11** (1959).
9. R. COURANT, D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin 1931.
10. GR. C. MOISIL, *Sisteme diferentiale adjunkte si formula de reciprocitate*, Bul. st. Acad. (R.P.R.), **3**, 1951, 189.
11. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, Warszawa, Wyd. WAT, 1957.
12. V. IONESCU-CAZIMIR, (1) *Asupra ecuațiilor echilibrului termoelastic. II. Relațiile între tensiuni și temperatura*, Com. Acad. R.P.R., **2**, **1** (1951).
- (2) *Asupra ecuațiilor echilibrului termoelastic. III. Relațiile între tensiuni*, Com. Acad. R.P.R., **5**, **1** (1951).
13. J. S. PODSTRIGACZ, *Podstawowe rozwiązanie nieustalonego zagadnienia termosprężystości* (w języku ukraińskim), Prikładna Mechanika, Kijów, **2**, **6** (1960).
14. D. RÜDIGER, *Bemerkung zur Integration der thermo-elastischen Grundgleichungen*, Österr. Ing. Archiv, **18** (1964), 1–2.
15. H. ZORSKI, (1) *Singular solutions for thermoelastic media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **6**, **6** (1958).
- (2) *On a certain property of thermoelastic media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **6**, **6** (1958).
16. J. IGNACZAK, *Direct determination of stress from the stress equations of motion in elasticity*, Arch. Mech. Stos., **5**, **11** (1959).
17. E. SOÓS, *Galerkin's representation, Beltrami-Michell's conditions and Green's functions (for short time) in the linear theory of coupled thermoelasticity*, Arch. Mech. Stos., **17** (1965).
18. W. NOWACKI, *On the treatment of the two-dimensional coupled thermoelastic problems in terms of stresses*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **3**, **9** (1961).
19. E. MELAN, H. PARKUS, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Wien 1952.
20. H. PARKUS, *Stationäre Wärmespannungen*, Wien 1959.
21. A. BOLEY, J. H. WEINER, *Theory of thermal stresses*, New York 1960.
22. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1962.
23. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical theory of elasticity*, New York 1956.
24. V. IONESCU-CAZIMIR, *Problem of linear thermoelasticity. Uniqueness theorems (I), (II)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **12**, **12** (1964).
25. V. IONESCU-CAZIMIR, *Problem of linear coupled thermoelasticity. Theorems on reciprocity for the dynamic problem of coupled thermoelasticity (I)*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série., Sci. Techn., **9**, **12** (1964).

- (2) *Problem of linear coupled thermoelasticity. Some applications of the theorems of reciprocity for the dynamic problem of coupled thermoelasticity (II)*. Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 9, 12 (1964).
26. M. A. BIOT, *New thermoelastical reciprocity relations with application to thermal stresses*, J. Aero/Space Sciences, 7, 26 (1957).
27. V. M. MAJZIEL, *Temperaturnaja zadacza teorii uprugosti*, Kijów 1951.
28. A. Galka, *Green's functions for the coupled problem of thermoelasticity obtained from the solution of the theory of thermal stresses*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 7, 13 (1965).
29. A. Galka, *Singular solutions of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. Techn., 7, 13 (1965).
30. E. TREFFTZ, *Mathematische Elastizitätstheorie*, Encyk. der Physic, 6, Berlin 1926.
31. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Singular integral equations of thermoelasticity*, Int. J. of Engineering Science, V, No 1, 1966.
32. W. NOWACKI, *Mixed boundary value problems of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 11, 12 (1964).
33. H. DERESIEWICZ, *Plane wave in a thermoelastic solid*, J. Acoust. Soc. Amer., 29 (1957).
34. P. CHADWICK, I. N. SNEDDON, *Plane waves in an elastic solid conducting heat*, J. Mech. Phys. of Solids, 6 (1958).
35. L. BROUILLON, *Tenseur en mécanique et en élasticité*, Paris 1938.
36. P. CHADWICK, *Progress in solid mechanics. The dynamical theory*, Amsterdam 1960.
37. I. N. SNEDDON, *The propagation of thermal stresses in thin metallic rods*, Proc. Roy. Soc. Edin., Sec. A, 9, 65 (1959).
38. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termospłężystości*, PWN, Warszawa 1966.
39. V. KUPRADZE, *Progress in solid mechanics, V. III. Dynamical problems in elasticity*, Amsterdam 1963.
40. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The Sommerfeld conditions for coupled problems of thermoelasticity, Examples of coupled stresses and temperature concentration at cylindrical and spherical cavities*, Arch. Mech. Stos., 1, 14 (1962).
41. W. NOWACKI, *Some dynamic problems of thermoelasticity*, Arch. Mech. Stos., 2, 11 (1959).
42. B. B. BAKER, E. T. COPSON, *The mathematical theory of Huygens' principle*, Oxford 1953.
43. W. NOWACKI, *Sur certain problèmes dynamiques de la thermoélasticité*, Acad. Polon. Sci. Centre Scient. à Paris, Fasc. 37, Paris 1962.
44. W. NOWACKI, *Green functions for an thermoelastic medium (I)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 6, 12 (1964).
45. W. NOWACKI, *Green functions for the thermoelastic medium (II)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 9, 12 (1964).
46. W. NOWACKI, *Some dynamic problems of thermoelasticity (II)*, Proc. Vibr. Probl., 5, 4 (1964).
47. F. J. LOCKETT, *Effect of thermal properties of a solid on the velocity of Rayleigh waves*, J. Mech. Phys. Solids, 7 (1958).
48. F. J. LOCKETT, *Propagation of thermal stresses in a semi-infinite medium*, AFOSR TN 59-448 (Duke Univ. ASTIA AD 215 923) Apr. 1959.
49. P. CHADWICK, D. W. WINDLE, *Propagation of Rayleigh waves along isothermal insulated boundaries*, Proc. Roy. Soc., 280, No 1380, Ser. A, 1964.
50. F. J. LOCKETT, *Longitudinal elastic waves in cylinders and tubes including thermoelastic effects*, Proc. Edinburgh Math. Soc., part. 3, 11 (1959).
51. W. NOWACKI, M. SOKOŁOWSKI, *Propagation of thermoelastic waves in plates*, Arch. Mech. Stos., 6, 11 (1959).
52. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The plane dynamic problem of thermoelasticity*, Proc. Vibr. Probl., 4, 2 (1961).
53. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Transversal vibrations of a plate produced by heating*, Arch. Mech. Stos., 5, 13 (1961).
54. P. CHADWICK, *On the propagation of thermoelastic disturbance in thin plates and shells*, J. of Phys. Mech. Solids, V. No 10, 1962.

55. R. B. HETNARSKI, *Solution of the coupled thermoelastic problem in the form of series of functions*, Arch. Mech. Stos., 4, **16** (1964).
56. J. IGNACZAK, *Note on the propagation of thermal stresses in a long metallic rod*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 5, **7** (1959).
57. W. NOWACKI, *Some dynamic problems of thermoelasticity (III)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 7, **13** (1965).
58. M. LESSEN, *The motion of a thermoelastic solid*, Quart. Appl. Math., **15** (1957).
59. G. A. NARIBOLI, *Spherically symmetric thermal shock in a medium with thermal and elastic deformations coupled*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, **14** (1961).
60. R. B. HETNARSKI, *Coupled one-dimensional thermal shock problem for small times*, Arch. Mech. Stos., **13** (1961).
61. R. B. HETNARSKI, *Coupled thermoelastic problem for the half-space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 1, **12** (1964).
62. B. A. BOLEY, I. S. TOLINS, *Transient coupled thermoelastic boundary value problems in the half-space*, J. Appl. Mech., **29** (1962).
63. R. MUKI, S. BREUER, *Coupling effects in transient thermoelastic problem*, Österr. Ing. Archiv, **16** (1962).
64. G. PARIA, *Coupling of elastic and thermal deformations*, Appl. Sci. Res. (A), **7** (1958).
65. G. EASON, I. N. SNEDDON, *The dynamic stresses produced in elastic bodies, by uneven heating*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, ser. A, **65** (1959).
66. F. J. LOCKETT, I. N. SNEDDON, *Propagation of thermal stresses in an infinite medium*, Proc. Edinburgh Math. Soc., part 4, **11** (1959).
67. M. LESSEN, *Thermoelastic damping at the boundary between dissimilar solids*, J. Appl. Phys., **28** (1957).
68. G. A. NARIBOLI, V. B. NYAYADHISH, *One dimensional thermoelastic wave*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 4, **16** (1963).
69. W. NOWACKI, *Green functions for the thermoelastic medium (III)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **13** (1964).
70. P. CHADWICK, *Thermal damping of a vibrating elastic body*, Mathematica, **9** (1962).
71. R. B. HETNARSKI, *The fundamental solution of the coupled thermoelastic problem for small times*, Arch. Mech. Stos., 1, **16** (1964).
72. G. HERRMANN, (1) *On a complementary energy principle in linear thermoelasticity*, J. Aero/Space Sciences, **25** (1958).
- (2) *On variational principles in thermoelasticity and heat conduction*, Quart. Appl. Mech., 2, **21** (1963).
73. W. P. MASON, *Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics*, D. van Nostrand, New York 1950.
74. R. D. MINDLIN, *On the equation of motion of piezo-electric crystals. Problem of Continuum Mechanics*, Philadelphia 1961.
75. W. NOWACKI, *A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezo-electric crystals*, Proc. Vibr. Probl., 1, **6** (1965).
76. S. KALISKI, J. PETYKIEWICZ, *Dynamical equations of motion coupled with the field of temperatures and resolving functions for elastic and inelastic anisotropic bodies in the magnetic field*, Proc. Vibr. Probl., 3, **1** (1960).
77. G. PARIA, (1) *On magneto-thermo-elastic waves*, Proc. Camb. Phil. Soc., part. 3, **58** (1962).
- (2) *Magneto-thermo-elastic interactions in an infinite solid due to instantaneous heat sources*, Proc. Vibr. Probl., 1, **5** (1964).
78. A. J. WILLSON, *The propagation of magneto-thermo-elastic plane waves*, Proc. Camb. Phil. Soc., **59** (1963).
79. S. KALISKI, W. NOWACKI, *Excitation of mechanical-electromagnetic waves induced by a thermal shock*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 1, **10** (1962).

80. S. KALISKI, W. NOWACKI, *Combined elastic and electromagnetic waves produced by thermal shock in the case of a medium of finite elastic conductivity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 4, 10 (1962).

81. S. KALISKI, W. NOWACKI, *Twierdzenie o wzajemności w magneto-termospřeżystości (I)*, Biul. W.A.T., 11, 13 (1964).

P e z j o m e

ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Доклад посвящается развитию сопряженной термоупругости за последнее десятилетие. После обсуждения термодинамических основ теории выводятся основные соотношения и дифференциальные уравнения термоупругости и даются главные методы их решения. Основное содержание дальнейших рассуждений составляют общие энергетические и вариационные теоремы, теоремы о взаимности, а также вытекающие из них методы интегрирования уравнений термоупругости. В заключение представлен вопрос о распространении монохроматических и аperiодических волн и обсуждаются полученные в этой области детальные результаты.

S u m m a r y

DYNAMICAL PROBLEMS OF THERMOELASTICITY

The paper is devoted to the development of the coupled thermoelasticity during the last ten years. After discussing the thermodynamical fundamentals of the theory, basic relations and the differential equations of thermoelasticity have been derived, also the main methods of solution. The central point of the further discussion consists in general theorems: energy theorems, variational principles, reciprocity theorems and consequently the method of integration of the equations of thermoelasticity. Finally, the problem of the propagation of the monochromatic and aperioidic waves has been presented and the main particular achievements in this field have been discussed.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 lipca 1965 r.