

DRGANIA UKŁADÓW QUASI-LINIOWYCH Z CZŁONAMI ŻYROSKOPOWYMI Z UWZGLĘDNIENIEM REZONANSU WEWNĘTRZNEGO

W. A. G R O B O W (KIJÓW)

Układy drgające z członami żyroskopowymi spotyka się w zagadnieniach dynamiki wirników turbinowych, wirówek, separatorów, wrzecion maszyn włókienniczych oraz w innych zagadnieniach dotyczących dynamiki maszyn i przyrządów. Brak symetrii w połączeniach sprężystych, spowodowany niejednakową sztywnością wałów i podpór, jak również zmienność masy wirników u niektórych typów wirówek i wrzecion maszyn włókienniczych warunkują różnorodność i złożoność widma częstości. W wyniku tego w układach drgających z połączeniami żyroskopowymi otrzymuje się bardzo często związki w liczbach całkowitych między drganiami własnymi, to znaczy związki w rodzaju $\frac{p}{r} \lambda_i \approx \lambda_k$, wiadczące o możliwości pojawienia się rezonansu wewnętrznego.

Drgania w układach żyroskopowych są uzależnione zwykle od niewyważenia wirników. Dlatego zagadnienie sprowadza się do badania drgań układu nieautonomicznego z członami żyroskopowymi, znajdującego się w ogólnym przypadku (jak to ma miejsce w wirnikach współosiowych z urządzeniami do automatycznego wyważania) pod działaniem zaburzeń o wielu częstościach $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$. Sposób zmiany tych częstości określa się z charakterystyk i rezerwy mocy urządzeń napędowych.

W układach nieautonomicznych oprócz rezonansów wewnętrznych mogą pojawiać się złożone rezonansy w postaci

$$\sum_{i=1}^N p_i \lambda_i + \sum_{j=1}^m r_j \omega_j \approx \lambda_k(\tau),$$

gdzie p_i i r_i oznaczają wzajemnie proste liczby całkowite.

Rozpatrzmy układ dynamiczny, którego położenie określają współrzędne $q_1, q_2, \dots, q_N$ charakteryzujące przemieszczenia liniowe i kątowe wirników podczas drgań, a ruchy obrotowe wirników określone są współrzędnymi kątowymi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$.

Założmy, że współrzędne kątowe są quasi-okresowe. Wtedy drgania układu opisują równania

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \mu Q_j(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; \varphi_1, \dots, \varphi_m; \dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_m),$$

gdzie

$$(2) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \dot{q}_i \dot{q}_j + 2b_{ij}(\tau) q_i \dot{q}_j + c_{ij}(\tau) q_i q_j]$$

oznacza lagrangian rozpatrywanego układu ($i, j = 1, 2, \dots, N$), μ jest małym parametrem oraz Q_j jest pewną funkcją charakteryzującą zaburzenia zewnętrzne i siły dysypatywne działające na układ konserwatywny.

Częstości i amplitudy zaburzeń, zależne od prędkości kątowej wirników, określają równania

$$(3) \quad \frac{d^2 q_l}{dt^2} = \mu \Phi_l(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; \ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_N; \varphi_1, \dots, \dot{\varphi}_l), \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Założmy, że wzajemny wpływ drgań na ruch obrotowy jest niewielki. Równania (3) można wtedy scałkować niezależnie. Oznacza to, że zmiana amplitudy i częstości zaburzeń w warunkach niestacjonarnych zależy tylko od charakterystyki napędu [4]. W ten sposób zagadnienie sprowadza się do badania drgań niestacjonarnych, opisanych równaniami (1).

Założmy, że częstości własne λ układu niezaburzonego (1)

$$(4) \quad \sum_{i=1}^N [a_{ij}(\tau) \ddot{q}_i + b_{ij}(\tau) \dot{q}_i + c_{ij}(\tau) q_i] = 0,$$

określone z równań

$$(5) \quad D(\lambda) = \|-a_{ij}(\tau)\lambda^2 + b_{ij}(\tau)\lambda + c_{ij}(\tau)\| = 0$$

spełniając warunki

$$\sum_{i=1}^N \frac{p_i}{r_i} \lambda_i = \lambda_k,$$

świadczące o możliwości występowania w układzie rezonansów wewnętrznych.

Zagadnieniu badania drgań w układach żyroskopowych z uwzględnieniem rezonansu wewnętrznego poświęcone są prace Ju. A. MITROPOLSKIEGO [3] oraz autora [5].

Rozwijając ideę podaną w pracy [5] pokażemy metodę otrzymania rozwiązań asymptotycznych dla układów drgających z członami żyroskopowymi przy uwzględnieniu rezonansu wewnętrznego. Metoda ta polega na wykorzystaniu idei współrzędnych «quasi-normalnych» [1] i zasady uśrednienia [2, 3] oraz wydzieleniu po prawych stronach równań, sprowadzonych do postaci standardowej, składowych harmonicznych z argumentami zmieniającymi się powoli. Autor ogranicza się do rozpatrzenia tylko pierwszego przybliżenia, dającego dostateczną dokładność w większości zagadnień technicznych.

Przekształćmy równania (1) do współrzędnych quasi-normalnych, stosując metodę B. W. BULGAKOWA [1]. W tym celu napiszmy te równania najpierw w postaci kanonicznej

$$(6) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \mu Q_i^R,$$

gdzie

$$H = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$$

oznacza funkcję Hamiltona, pozwalającą na rozwinięcie w szereg względem potęg małego parametru

$$(7) \quad H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 \dots,$$

$$(8) \quad H_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\alpha_{ij}(\tau) q_i q_j + 2\gamma_{ij}(\tau) q_i p_j + \beta_{ij}(\tau) p_i p_j],$$

H_1 jest funkcją zależną od $q_1, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_N; \varphi_1, \dots, \varphi_m$ i ich pochodnych, zawierającą małe nieliniowe dodatki do sił sprężystych oraz zaburzeń, zależne od niewyważenia wirników;

$$Q_i^R = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\mu \sum_{k=1}^N h_{ik} \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{kj}(\alpha_{ik})}{\Delta(\alpha_{ik})} p_j$$

są to siły dysypatywne; R oznacza dysypatywną funkcję Rayleigha; h_{ik} są współczynnikami tłumienia.

Po obliczeniu pochodnych występujących w równaniu (6) otrzymujemy

$$(9) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\tau) q_j + \sum_{j=1}^N \left[\delta_{ij} \frac{dp_j}{dt} + \gamma_{ij}(\tau) p_j \right] &= -\mu \frac{\partial H_1}{\partial q_i} + \mu Q_i^R, \\ \sum_{j=1}^N \left[-\delta_{ij} \frac{dq_j}{dt} + \gamma_{ij}(\tau) q_j \right] + \sum_{j=1}^N \beta_{ij}(\tau) p_j &= \mu \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \end{aligned}$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera.

Postępując według B. W. BULGAKOWA [1] wykonamy kanoniczne przekształcenie zmiennych q_i, p_i na zmienne x_i, y_i za pomocą wzorów

$$(10) \quad \begin{aligned} q_i &= \sum_{k=1}^N [X_i^{(k)}(\tau) x_k + Y_i^{(k)}(\tau) y_k], \\ p_i &= \sum_{k=1}^N [X_{N+i}^{(k)}(\tau) x_k + Y_{N+i}^{(k)}(\tau) y_k]; \end{aligned}$$

$$(11) \quad X_j^{(k)}(\tau) - iY_j^{(k)}(\tau) = \frac{F_{jl}(i\lambda_k)}{\sqrt{\lambda_k} |\Delta_k(i\lambda_k) F_{ll}(i\lambda_k)|}.$$

We wzorze (11) oznaczono

$$i = \sqrt{-1}, \quad \Delta_k(i\lambda_k) = \frac{D(\lambda)}{\lambda^2 + \lambda_k^2}, \quad \begin{aligned} j &= 1, 2, \dots, 2N, \\ k &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

$D(\lambda)$ jest wyznacznikiem charakterystycznym układu, $F_{ll}(i\lambda_k)$ oznaczają elementy macierzy dołączonej, odpowiadającej macierzy funkcjonalnej $f(\lambda)$ układu niezaburzonego (9).

Dokonując w równaniu (9) zamiany zmiennych za pomocą wzorów (10) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_k}{dt} - \lambda_k(\tau)y_k &= \mu \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} - i \frac{\partial q_j}{\partial y_k} \right) \left(\frac{\partial H_1}{\partial q_j} + Q_j^R \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_k} - i \frac{\partial p_j}{\partial y_k} \right) \frac{\partial H_1}{\partial p_j} \right] \right\} + \mu \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \left(\frac{dX_j^{(l)}}{d\tau} Y_{N+j}^{(k)} - \frac{dX_{N+j}^{(l)}}{d\tau} Y_j^{(k)} \right) x_l + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{dY_j^{(l)}}{d\tau} Y_{N+j}^{(k)} - \frac{dY_{N+j}^{(l)}}{d\tau} Y_j^{(k)} \right) y_l \right\} = \mu F_k(x, y, \varphi, \tau), \\
 (12) \quad \frac{dy_k}{dt} + \lambda_k(\tau)x_k &= \mu \operatorname{Im} \left\{ i \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} - i \frac{\partial q_j}{\partial y_k} \right) \left(\frac{\partial H_1}{\partial q_j} + Q_j^R \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_k} - i \frac{\partial p_j}{\partial y_k} \right) \frac{\partial H_1}{\partial p_j} \right] \right\} + \mu \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \left(\frac{dX_j^{(l)}}{d\tau} X_{N+j}^{(k)} - \frac{dX_{N+j}^{(l)}}{d\tau} X_j^{(k)} \right) x_l + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{dY_j^{(l)}}{d\tau} X_{N+j}^{(k)} - \frac{dY_{N+j}^{(l)}}{d\tau} X_j^{(k)} \right) y_l \right\} = \mu G_k(x, y, \varphi, \tau).
 \end{aligned}$$

W funkcjach F i G symbolami x , y i φ oznaczono w skrócie cały zbiór zmiennych $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ i $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$. Związek między współrzędnymi $x_1, x_2, \dots, x_N$ i $y_1, y_2, \dots, y_N$ w równaniach (12) pojawia się tylko w wyrazach proporcjonalnych do małego parametru. Dlatego właśnie nazwano je quasi-normalnymi.

Różniczkując pierwsze z równań (12) względem czasu i podstawiając wielkość dy_k/dt z drugiego, otrzymamy zamiast układu (12) jedno równanie rzędu drugiego

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \lambda_k^2(\tau)x_k = \mu f_k(x, \dot{x}, \varphi, \tau),$$

gdzie

$$f_k = \frac{\dot{\lambda}_k(\tau)}{\lambda_k(\tau)} \dot{x}_k + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}_i} \lambda_i^2 x_i \right) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_j} \omega_j + G_k.$$

Rozpatrzmy przypadek, gdy na układ działa zaburzenie o pojedynczej częstotliwości ω . Założmy, że w układzie występuje rezonans wewnętrzny typu $\sum_{i=1}^A \frac{p_i}{r_i} \lambda_i \approx \lambda_k$ oraz rezonans zewnętrzny $\omega = \lambda_k$.

Niech $\mu \Delta_k(\tau)$ oznacza rozstrojenie między zewnętrzną częstotliwością ω i częstotliwością drgań własnych λ_k w sąsiedztwie rezonansu. Wtedy

$$\lambda_k^2(\tau) = \left[\frac{p_k}{r_k} \omega(\tau) \right]^2 + \mu \Delta_k(\tau).$$

W przypadku układu niezaburzonego (12)

$$(13) \quad x_k = A_k \cos \left(\frac{p_k}{r_k} \varphi + \Psi_k \right),$$

$$(14) \quad \dot{x}_k = -A_k \frac{p_k}{r_k} \omega \sin \left(\frac{p_k}{r_k} \varphi + \Psi_k \right).$$

Przyjmując że (13) i (14) są wzorami na przekształcenie zmiennych, przekształcimy równania (12) stosownie do metody wariacji do postaci

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{dA_k}{dt} &= -\frac{\mu}{s_k \omega} \left[(s_k^2 \omega^2 - \lambda_k^2) A_k \cos \theta_k + f_k(A, \theta, \varphi) + A_k s_k \frac{d\omega}{d\tau} \sin \theta_k \right] \sin \theta_k, \\ \frac{d\Psi_k}{dt} &= \frac{\mu}{A_k s_k \omega} \left[(s_k^2 \omega^2 - \lambda_k^2) A_k \cos \theta_k + f_k(A, \theta, \varphi) + A_k s_k \frac{d\omega}{d\tau} \sin \theta_k \right] \cos \theta_k, \end{aligned}$$

gdzie

$$s_k = \frac{p_k}{r_k}, \quad \theta_k = \frac{p_k}{r_k} \varphi + \Psi_k.$$

Funkcje $f_k(A, \theta, \varphi)$ okresowe względem θ i φ są funkcjami o okresie 2π , można więc rozłożyć je na $(N+1)$ -krotny szereg Fouriera względem $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ i φ :

$$(16) \quad f_k(A, \theta, \varphi) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} \dots \sum_n f_{kmn}(A_1, \dots, A_N, \tau) e^{i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r + n \varphi \right)},$$

gdzie $f_{kmn}(A_1, \dots, A_N, \tau)$ oznaczają współczynniki Fouriera określone wzorem

$$(17) \quad f_{kmn} = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f_k(A, \theta, \varphi) e^{-i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r + n \varphi \right)} d\theta_1, \dots, d\theta_N d\varphi.$$

Podstawiając (16) do równań (15) i zastępując w nich funkcje trygonometryczne przez funkcje wykładnicze, otrzymujemy

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{dA_k}{dt} &= \frac{\mu}{2is_k \omega} \left\{ (s_k^2 \omega^2 - \lambda_k^2) \frac{A_k}{2} e^{2i\theta_k} e^{-2i\theta_k} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} \sum_n f_{kmn} \left[e^{i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r + \theta_k + n \varphi \right)} - e^{-i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r - \theta_k + n \varphi \right)} \right] \right\} = \\ &= \mu \mathcal{F}_1(A_1, \dots, A_N, \Psi_1, \dots, \Psi_N, \varphi), \\ \frac{d\Psi_k}{dt} &= -\frac{\mu}{2is_k \omega A_k} \left\{ (s_k^2 \omega^2 - \lambda_k^2) \frac{A_k}{2} (2 + e^{2i\theta_k} - e^{-2i\theta_k}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} \sum_n f_{kmn} \left[e^{i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r + \theta_k + n \varphi \right)} + e^{-i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r - \theta_k + n \varphi \right)} \right] \right\} = \\ &= \mu \mathcal{F}_2(A_1, \dots, A_N, \Psi_1, \dots, \Psi_N, \varphi). \end{aligned}$$

Równania (18) mają postać standardową, dlatego można je rozwiązać metodą zaburzeń (perturbacji). Przedstawiając A_k i Ψ_k jako superpozycję wolno zmieniających się członów a_k i ψ_k oraz sumy małych członów drgających i ograniczając się w zagadnieniach technicznych do pierwszego przybliżenia, otrzymamy

$$(19) \quad \frac{da_k}{dt} = \mu M_t \{ \mathcal{F}_1 \}, \quad \frac{d\psi_k}{dt} = \mu M_t \{ \mathcal{F}_2 \},$$

gdzie $M_t \{ \mathcal{F}_1 \}$ i $M_t \{ \mathcal{F}_2 \}$ są operatorami uśrednienia względem jawnie występującego czasu (lub względem zmiennych kątowych zależnych jawnie od czasu).

Wykonując operację uśrednienia otrzymamy równania dla pierwszego przybliżenia

$$\begin{aligned}\frac{da_k}{dt} &= -\frac{\mu}{2is_k\omega} \left\{ \sum^* f_{kmn}(a, \psi) e^{i(m\psi + \psi_k)} + \sum^{**} f_{kmn}(a, \psi) e^{i(m\psi - \psi_k)} \right\}, \\ \frac{d\psi_k}{dt} &= -\frac{\mu}{2ia_k s_k \omega} \left\{ \sum^* f_{kmn}(a, \psi) e^{i(m\psi + \psi_k)} + \sum^{**} f_{kmn}(a, \psi) e^{i(m\psi - \psi_k)} + (s_k^2 \omega^2 - \lambda_k^2) \right\},\end{aligned}$$

gdzie a , ψ i m oznaczają wskaźniki złożone, określające zbiór $\{a_1, \dots, a_N\}$; $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$; $\{m_1, \dots, m_N\}$. Symbol $\sum^*$ oznacza sumowanie względem wskaźników, dla których

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{p_i}{r_i} + n = -\frac{p_k}{r_k},$$

a symbol $\sum^{**}$ oznacza sumowanie względem wskaźników, dla których

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{p_i}{r_i} + n = \frac{p_k}{r_k}.$$

Oznacza to praktycznie, że po wykonaniu uśrednienia względem szybko zmieniających się zmiennych kątowych, zależnych w sposób jawny od czasu, w równaniach (20) pozostają tylko człony zawierające argumenty zmieniające się powoli. Dlatego przed uśrednieniem równań (18) należy koniecznie wydzielić w nich składową harmoniczną z argumentami zmieniającymi się powoli, wychodząc z fizycznego znaczenia problemu. W przypadku tutaj rozpatrzonym argumentami zmieniającymi się powoli są

$$\sum_{j=1}^N m_j^{(k)} \theta_j(t) + n^{(k)} \varphi(t) - \theta_k(t) = \mu \eta_k(t).$$

Jeżeli w układzie istnieje «prosty» rezonans wewnętrzny $(p_j/r_j) \lambda_j \approx \lambda_k$ oraz rezonans wewnętrzny $\omega = \lambda_k$, to w pobliżu rezonansu argumentami zmieniającymi się powoli są

$$\varphi - \theta_k = \eta_1 \quad \text{ i } \quad \frac{p_j}{r_j} \psi_j - \psi_k = \eta_2,$$

gdzie

$$\eta_2 = \frac{p_j}{r_j} \lambda_j - \lambda_k.$$

Przypadek zaburzeń o wielu częstościach jest znacznie bardziej skomplikowany. Również w tym przypadku badanie drgań zależy od związków utworzonych przez częstości zewnętrzne $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$. Dla uproszczenia ograniczymy się do przypadku, gdy wśród zaburzeń istnieją dwie częstości ω_i i ω_{i+1} zmienne w czasie, które co do wartości różnią się mało w chwili, gdy jedna z nich, na przykład ω_i , wchodzi w rezonans z częstością własną λ_k . Przypadek ten ma praktyczne znaczenie, gdy rozpatruje się drgania współosiowych wirników turbinowych [4]. W dalszych rozważaniach zakładamy, że wpływ pozostałych składowych harmonicznnych jest nieznaczny i ograniczamy się do rozpatrzenia tylko składowych harmonicznnych ω_i i ω_{i+1} , które dla wygody oznaczmy ω_1 i ω_2 .

Niech przy rezonansie $\omega_1 = \lambda_k$ rozstrojenie częstości zaburzeń ω_1 i ω_2 spełnia warunek

$$\omega_2(\tau) - \omega_1(\tau) = \mu \delta(\tau).$$

Wtedy w układzie możliwy jest złożony rezonans typu

$$\sum_{i=1}^N m_i \lambda_i + p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 \approx \lambda_k.$$

W obszarze rezonansu z powodu małej różnicy częstości ω_1 i ω_2 zachodzą związki

$$(21) \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \mu \bar{\varphi}, \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \delta(\tau).$$

Równanie (12) można więc zapisać w postaci

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \lambda_k^2(\tau) x_k = \mu f_k(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, \varphi_1, \varphi_1 + \delta \bar{\varphi}).$$

W tym przypadku szczególnym rozwiązanie można zbudować w podany poprzednio sposób. Podamy tu jeszcze jeden sposób pozwalający dość łatwo uzyskać równania pierwszego przybliżenia.

Amplituda i faza w pierwszym przybliżeniu określona jest układem równań

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= \mu A_k^{(1)}(\tau, a, \psi, \mu \bar{\varphi}), \\ \frac{d\psi_k}{dt} &= \lambda_k(\tau) - \frac{p_k}{r_k} \omega(\tau) + \mu B_k^{(1)}(\tau, a, \psi, \mu \bar{\varphi}), \end{aligned}$$

gdzie a i ψ oznaczają zbiór $(a_1, \dots, a_N)$ i $(\psi_1, \dots, \psi_N)$.

Funkcje $A_k^{(1)}$ i $B_k^{(1)}$ można znaleźć wychodząc z zasady uśrednienia pracy wirtualnej wykonanej przez siły uogólnione $f_k(x, \dot{x}, \varphi, \varphi + \mu \bar{\varphi})$ w czasie pełnego okresu drgań.

Pisząc wyrażenie na pracę wirtualną

$$\delta W = f_k(x, \dot{x}, \varphi, \varphi + \mu \bar{\varphi}) (\delta a_k \cos \theta_k - \delta \psi_k a_k \sin \theta_k),$$

gdzie

$$\theta_k = \frac{p_k}{r_k} \lambda_k t + \psi_k$$

i rozwijając to wyrażenie w $(N+1)$ -krotny szereg Fouriera względem $\theta_1, \dots, \theta_N$ i φ_1 otrzymujemy

$$\delta W = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} \sum_n \delta W_{mn} e^{i \left[\sum_{r=1}^N m_r \theta_r + n \varphi_1 \right]},$$

gdzie δW_{mn} oznaczają współczynniki szeregu.

Uśredniając pracę wirtualną w czasie okresu drgań i uwzględniając podane poprzednio uwagi o argumentach zmieniających się powoli, otrzymamy dla $A_k^{(1)}$ i $B_k^{(1)}$ układ równań

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A_k^{(1)}}{\partial \psi} \left[\lambda_k - \frac{p}{r} \omega_1(\tau) \right] - 2a_k \lambda_k B_k^{(1)} &= \frac{\delta \tilde{W}}{\delta a_k}, \\ \frac{\partial B_k^{(1)}}{\partial \psi} a_k \left[\lambda_k - \frac{p}{r} \omega_1(\tau) \right] + 2\lambda_k A_k^{(1)} &= -a_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial \tau} - \frac{\delta \tilde{W}}{\delta \psi_k}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\frac{\partial A_k^{(1)}}{\partial \psi} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial A_k^{(1)}}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial B_k^{(1)}}{\partial \psi} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial B_k^{(1)}}{\partial \psi},$$

$$(23) \quad \frac{\delta \tilde{W}}{\delta a_k} = \frac{2}{(2\pi)^{N+1}} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma_r \psi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f_k(a, \theta, \varphi_1, \varphi_1 + \mu \bar{\varphi}) \cos \theta_k e^{-i\sigma_r \psi} d\theta_1 \dots d\theta_N a \varphi_1,$$

$$\frac{\delta \tilde{W}}{\delta \psi_k} = \frac{2}{(2\pi)^{N+1}} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma_r \psi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f_k(a, \theta, \varphi_1, \varphi_1 + \mu \bar{\varphi}) \sin \theta_k e^{-i\sigma_r \psi} d\theta_1 \dots d\theta_N d\varphi_1.$$

Tutaj σ oznacza wskaźnik złożony $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$.

Przybliżenia wyższych rzędów można znaleźć korzystając z idei metod asymptotycznych Kryłowa-Bogoliubowa [2, 3], jednak metody te związane są z dużymi trudnościami obliczeniowymi.

Literatura cytowana w tekście

1. Б. В. БУЛГАКОВ, *О нормальных координатах*, Прик. мат. мех., 2, 10 (1946).
2. Н. Н. БОГОЛЮБОВ, Ю. Л. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, 1963.
3. Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*, Наука, 1964.
4. В. А. ГРОБОВ, *Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов*, Изд. АН СССР, 1961.
5. В. А. ГРОБОВ, *О построении асимптотических приближений, описывающих нестационарные процессы в нелинейных гироскопических системах, с помощью принципа усреднения*, Украинский математический журнал, 2, 11 (1959).

Резюме

КОЛЕБАНИЯ КВАЗИ-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ ЧЛЕНАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННЕГО РЕЗОНАНСА

Исследованию колебаний в гироскопических системах при наличии внутреннего резонанса посвящены работы Ю. А. Митропольского [3] и автора [5].

В развитие идеи, изложенной в работе [5], в докладе рассматривается методика построения асимптотических решений для колебательных систем с гироскопическими членами при наличии внутреннего резонанса, основанная на использовании идеи «квази-нормальных» координат [1] и принципа усреднения [2, 3] с выделением в правых частях уравнений, приведенных к стандартной форме, гармоник с медленно изменяющимися аргументами. При этом автор ограничивается рассмотрением только первого приближения, дающего достаточную точность для большинства технических задач.

S u m m a r y

ON THE OSCILLATIONS OF QUASILINEAR SYSTEMS WITH GYROSCOPIC TERMS
WHEN INTERNAL RESONANCE IS INCLUDED

The problems concerning the oscillations of gyroscopic systems with the internal resonance included were considered by J. A. MITROPOLSKI [3] and by the author [5].

By developing the concept introduced in Ref. [5], the author shows how the asymptotic solutions for oscillating systems with gyroscopic terms can be found when the internal resonance is taken into account. In the method, the concept of the "quasinormal" coordinates [1] and the mean value principle are applied [2, 3]. Then, after reducing the equations to the standard form, harmonic components with the slow varying arguments are separated on the right-hand sides of the equations. The author considers the first approximation only. This gives the sufficient accuracy necessary in most of the technical problems.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lutego 1966 r.
