

UPROSZCZONA ANALIZA STATECZNOŚCI PODŁUŻNEJ SZYBOWCA W LOCIE HOLOWANYM

JERZY MARYNIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Loty holowane szybowców są obecnie szeroko stosowane. Dotychczas jednak zagadnienie stateczności szybowców w locie holowanym nie zostało w pełni rozwiązane. Istnieje zaledwie kilka prac związanych z tym zagadnieniem.

W roku 1933 F. JANIK [6] rozpatrywał obciążenia w locie holowanym szybowca. W pracy tej nie poruszał zagadnień stateczności. Określił konfigurację liny holowniczej przyjmując przybliżoną zmianę współczynników aerodynamicznych w funkcji kąta nachylenia liny nie popartą doświadczeniem.

W pracy [12] rozpatrywano stateczność szybowca holowanego na krótkim nieodkształcalnym «dyszlu».

Praca [1] zawiera szereg publikacji BRYANTA, BROWNA i SWEETINGA dotyczących stateczności latawców i szybowców w locie holowanym. Autorzy określając kąt holu (φ_1) rozpatrywali wyłącznie równowagę sił, pomijając równowagę momentów, co znacznie wpływa na wartości danych wyjściowych potrzebnych do obliczeń stateczności dynamicznej. Wprowadzając w równania ruchu pochodną momentu pochylającego względem zmiany prędkości pionowej m_w jak dla lotu swobodnego, nie uwzględniano zmian wynikających z holu. Zmiany te przy niektórych konfiguracjach są znaczne i mają wpływ na stateczność dynamiczną. W wymienionej pracy linę holowniczą traktowano jako nierozciągliwą.

S. NEUMARK w pracy [9] rozpatrywał konfigurację nierozciągliwej liny balonu w oparciu o dmuchania wykonane w r. 1934 w Instytucie Aerodynamicznym w Warszawie. W pracy [10] z r. 1963 rozpatruje on zagadnienia stateczności balonu na nierozciągliwej linie. Wyprowadza pochodne linowe i określa konfiguracje liny nierozciągliwej z pominięciem oporów tarcia. W przypadku holu szybowca zwis liny holowniczej jest mały i opory tarcia mogą być równorzędne z siłą aerodynamiczną normalną do liny i nie powinny być pomijane.

W niniejszej pracy rozpatrzono przypadek holu szybowca sztywnego (nieodkształcalnego) przez samolot (ciężki) znajdujący się w poziomym prostoliniowym locie ustalonym. Opierając się na pracach [9] i [10] określono konfiguracje rozciągliwej liny holowniczej z uwzględnieniem oporów tarcia. Rozpatrzono równowagę i stateczność statyczną podłużną szybowca w locie holowanym, określono zakresy kątów holu i współczynników siły nośnej możliwych do uzyskania w czasie holu.

Rozpatrując stateczność dynamiczną szybowca zastosowano teorię małych zakłóceń. Równania ruchu otrzymano w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami [1]. Pozwoliło to na określenie współczynników

równania charakterystycznego i zastosowanie kryteriów stateczności ROUTH-HURWITZA jak również obliczenie pierwiastków równania charakterystycznego metodą BAIRSTOWA.

W pracy nie uwzględniono dynamiki liny holowniczej jak również zakłóceń wynikających z nieustalonych ruchów samolotu. Zagadnienie rozwiązano metodą stosowaną przy rozważaniu stateczności w locie swobodnym [3, 4 i 11]. Pozwoliło to na wzajemną konfrontację wyników, odpowiadających lotowi swobodnemu i holowanemu oraz uprościło analizę.

Na podstawie obliczeń numerycznych wykonanych dla jednego z szybowców wycenowych dokonano analizy stateczności. Zbadano jak wpływa na stateczność szybowca położenie względem samolotu holującego, prędkość holu, usytuowanie zaczepu holującego względem środka ciężkości szybowca i długość liny holowniczej.

Ważniejsze oznaczenia

$\alpha = \frac{dC_z}{d\alpha}$ [1/rad]	zmiana współczynnika siły nośnej szybowca w zależności od kąta natarcia,
$\alpha_1 = \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H}$ [1/rad]	zmiana współczynnika siły nośnej usterzenia w zależności od kąta natarcia usterzenia,
$\alpha_2 = \frac{\partial C_{zH}}{\partial \beta_H}$ [1/rad]	zmiana współczynnika siły nośnej usterzenia w zależności od kąta wychylenia steru wysokości,
C_{ma}	współczynnik momentu pochyłającego szybowiec, pochodzący od sił aerodynamicznych,
C_{mt}	współczynnik momentu pochyłającego szybowiec, pochodzący od liny holowniczej,
C_n, C_t	współczynniki aerodynamiczne siły normalnej i stycznej do liny określone w stosunku do jej średnicy i długości jednostkowej,
C_z	współczynnik aerodynamiczny siły nośnej,
C_x	współczynnik aerodynamiczny oporu,
d [m]	średnica liny holowniczej,
g [m/sek ²]	przyspieszenie ziemskie,
h_z [m]	współrzędna zaczepu holowniczego szybowca mierzona pionowo wzgl. środka ciężkości,
$\bar{h}_1 = -\frac{dC_{ma}}{dC_z}$	zapas stateczności statycznej szybowca w locie swobodnym,
$\bar{h}_h = -\frac{dC_m}{dC_z}$	zapas stateczności statycznej szybowca w locie holowanym,
$\bar{h}_l = -\frac{dC_{mt}}{dC_z}$	zmiana zapasu stateczności statycznej szybowca wywołana holem,
I_y [kGm sek ²]	moment bezwładności szybowca względem osi poprzecznej,
k_z [m]	współrzędna zaczepu holowniczego szybowca mierzona poziomo względem środka ciężkości,
l_0, l_1 [m]	długość liny swobodnej i obciążonej,
l_a [m]	średnia cięciwa aerodynamiczna,
l_H [m]	odległość osi obrotu steru wysokości od środka ciężkości szybowca,
$m_u, m_w, m_{\dot{w}}, m_q$	pochoźne aerodynamiczne momentu pochyłającego względem zmiany: prędkości podłużnej, prędkości pionowej, prędkości zmiany kąta natarcia i prędkości kątowej pochyłania w postaci bezwymiarowej,
m [kG sek ² /m]	masa szybowca,
M [kG m]	moment pochyłający szybowca,

n [kG/m]	siła aerodynamiczna normalna do linii działająca na 1 m długości,
P_n [kG]	siła aerodynamiczna normalna do linii,
P_t [kG]	siła aerodynamiczna styczna do linii,
P_x [kG]	siła aerodynamiczna oporu,
P_z [kG]	siła aerodynamiczna wyporu (nośna),
P_{xH} [kG]	siła oporu aerodynamicznego usterzenia poziomego,
P_{zH} [kG]	siła nośna usterzenia poziomego,
q [kG/m]	ciężar jednostkowy metra bieżącego liny,
Q [kG]	ciężar szybowca,
$Re = dV/\nu$	liczba Reynoldsa,
S [m ²]	powierzchnia nośna skrzydeł szybowca,
S_H [m ²]	powierzchnia nośna usterzenia poziomego,
t [kG/m]	siła aerodynamiczna styczna działająca na 1 m długości liny,
t [sek]	czas,
T [kG]	naciąg liny,
T_1 [kG]	siła pochodząca od liny, działająca na zaczepie szybowca,
u [m/sek]	zmiana prędkości poziomej,
w [m/sek]	zmiana prędkości pionowej,
$U_1 = V$ [m/sek]	prędkość lotu,
x_s [m]	odległość środka ciężkości od środka aerodynamicznego,
x_1 [m]	odległość pozioma między końcami liny holowniczej,
x_{x1}, x_{z1}	pochodne linowe poziomej składowej siły naciągu liny względem przesunięcia: poziomego i pionowego w postaci bezwymiarowej,
x_u, x_w, x_q	pochodne aerodynamiczne składowej poziomej siły aerodynamicznej względem zmian prędkości: poziomej, pionowej i kątowej pochylenia w postaci bezwymiarowej,
X_1 [kG]	składowa pozioma naciągu liny przyłożona na zaczepie holowniczym szybowca działająca zgodnie z kierunkiem lotu,
z_1 [m]	odległość pionowa między końcami liny holowniczej,
z_s [m]	odległość pionowa środka aerodynamicznego od środka ciężkości,
Z_H [m]	odległość pionowa osi obrotu steru wysokości od środka ciężkości,
Z_{x1}, Z_{z1}	pochodne linowe pionowej składowej siły naciągu liny względem przesunięcia: poziomego i pionowego w postaci bezwymiarowej,
Z_u, Z_w, Z_q	pochodne aerodynamiczne składowej pionowej siły aerodynamicznej względem zmian prędkości: poziomej, pionowej i kątowej pochylenia w postaci bezwymiarowej,
Z_1' [kG]	składowa pionowa naciągu siły przyłożona na zaczepie holowniczym szybowca działająca, normalnie do kierunku lotu,
α [rad]	kąt natarcia szybowca,
α_{zH} [rad]	kąt zaklinowania usterzenia poziomego,
β_H [rad]	kąt wychylenia steru wysokości,
$\varepsilon = 2C_z/\pi A_e$ [rad]	kąt odchylenia strug spływających ze skrzydła,
φ_1 [rad]	kąt nachylenia liny holowniczej w stosunku do linii lotu mierzony na zaczepie szybowca,
φ_0 [rad]	kąt nachylenia liny holowniczej w stosunku do linii lotu mierzony na zaczepie samolotu,
φ_P [rad]	ograniczenie kąta holu ze względu na równowagę sił,
φ_M [rad]	ograniczenie kąta holu ze względu na równowagę momentów,
λ [1/kG]	współczynnik wydłużalności liny,
A_e	wydłużenie skrzydła szybowca,
$\bar{\lambda} = \bar{\xi} \pm i\bar{\eta}$	pierwiastki równania charakterystycznego w postaci bezwymiarowej,
$\kappa_H = S_H I_H / S I_a$	współczynnik efektywności usterzenia poziomego,

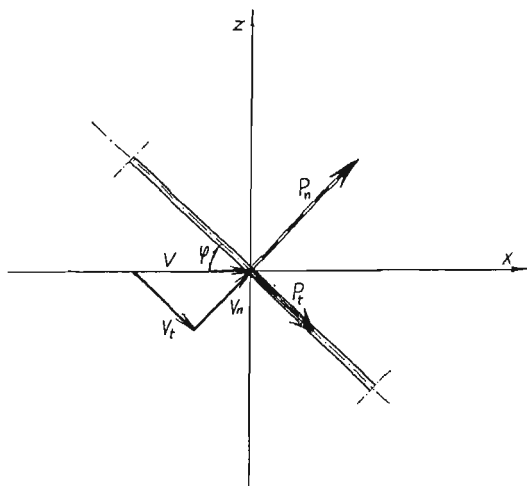
$\bar{\xi}$ współczynnik tłumienia w postaci bezwymiarowej,
 $\bar{\eta}$ częstość oscylacji w postaci bezwymiarowej,
 ρ [kGsek²/m⁴] gęstość powietrza.

2. Aerodynamika liny holowniczej

Do określenia konfiguracji liny holowniczej oprócz danych o ciężarze jednostkowym i własnościach sprężystych liny niezbędna jest znajomość sił aerodynamicznych. Ze względu na zmienny kąt nachylenia liny w stosunku do linii lotu należy określić zależność współczynnika siły nośnej C_{zi} i współczynnika oporu C_{xi} od kąta nachylenia liny φ .

Współczynnik oporu aerodynamicznego liny ustawionej prostopadle do przepływu powietrza ($\varphi = 90^\circ$) oznaczono przez C_n , a współczynnik oporu tarcia liny ustawionej równoległe w przepływie ($\varphi = 0$) oznaczono przez C_t .

Rozpatrzono siły aerodynamiczne działające na element liny o długości l i średnicy d nachylonej pod kątem φ do przepływu o prędkości V (rys. 1).



Rys. 1. Rozkład prędkości i sił aerodynamicznych działających na element liny o długości l i średnicy d

Siły aerodynamiczne określone przez współczynniki mają postać

$$P_n = \frac{1}{2} \rho l d V^2 C_n \sin^2 \varphi, \quad P_t = \frac{1}{2} \rho l d V^2 C_t \cos^2 \varphi.$$

Rozkładając siły P_n i P_t na kierunek normalny i styczny do przepływu otrzymano:

$$P_{zi} = P_n \cos \varphi - P_t \sin \varphi = \frac{1}{2} \rho l d V^2 (C_n \sin^2 \varphi \cos \varphi - C_t \sin \varphi \cos^2 \varphi), \quad (2.1)$$

$$P_{xi} = P_n \sin \varphi + P_t \cos \varphi = \frac{1}{2} \rho l d V^2 (C_n \sin^3 \varphi + C_t \cos^3 \varphi).$$

Siłę nośną działającą na element liny P_{zi} i siłę oporu P_{xi} określono za pomocą współczynników C_{zi} i C_{xi} :

$$P_{zi} = \frac{1}{2} \rho l d V^2 C_{zi}, \quad P_{xi} = \frac{1}{2} \rho l d V^2 C_{xi}, \quad (2.2)$$

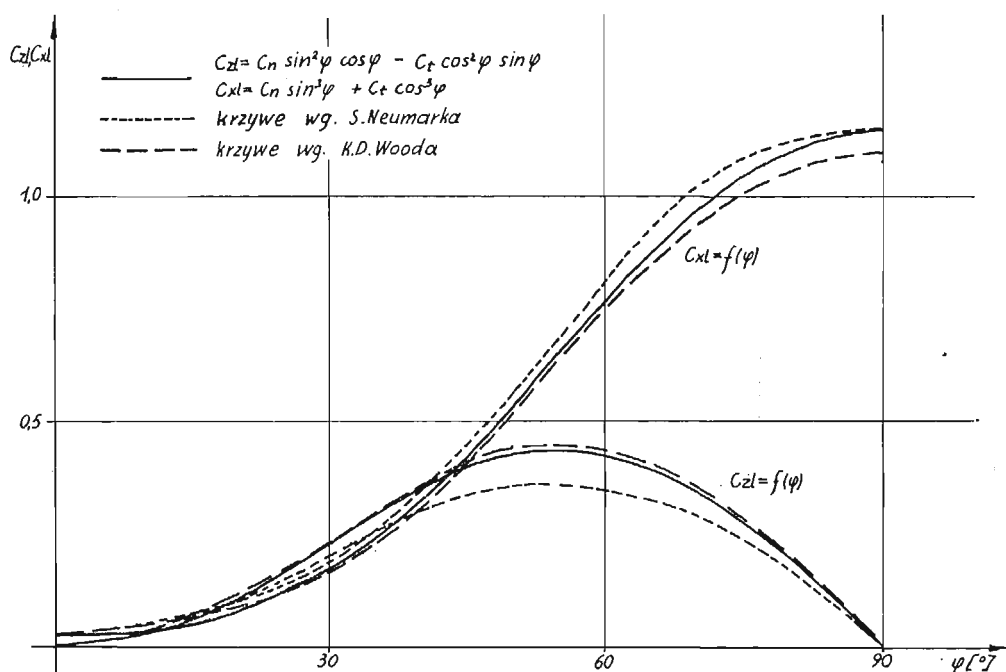
gdzie

$$(2.3) \quad \begin{aligned} C_{zl} &= C_n \sin^2 \varphi \cos \varphi - C_t \sin \varphi \cos^2 \varphi, \\ C_{xl} &= C_n \sin^3 \varphi + C_t \cos^3 \varphi. \end{aligned}$$

Wartości C_n i C_t dobrano tak, aby zależności (2.3) były zgodne z doświadczeniem [9 i 13] (por. rys. 2).

$$C_n = 1,15, \quad C_t = 0,035.$$

Na rysunku 2 krzywe oznaczone symbolem N zostały otrzymane przez S. NEUMARKA w czasie dmuchań lin balonowych w r. 1934 w Instytucie Aerodynamicznym w Warszawie [9]. Natomiast krzywe oznaczone symbolem W zostały podane przez K. D. WOODA [13].



Rys. 2. Doświadczalne i teoretyczne zależności aerodynamicznych współczynników siły nośnej i oporu w funkcji zmiany kąta pochylenia

Otrzymane zależności (2.3) na współczynniki aerodynamiczne mogą być stosowane dla lin holowniczych w całym zakresie prędkości stosowanych przy holu szybowców. Zakres liczb Reynoldsa dla lin holowniczych osiąga wartość $Re = (1 \div 6) \cdot 10^4$. Maksymalne wartości liczby Re są dużo niższe od krytycznej liczby $Re_{kr} = (1,8 \div 5) \cdot 10^5$ [2 i 13]. Daje nam to pewność, że zawsze znajdujemy się w zakresie podkrytycznym i przy obliczeniach nie ma potrzeby dokonywania odrębnych dmuchań dla poszczególnych lin holowniczych [9].

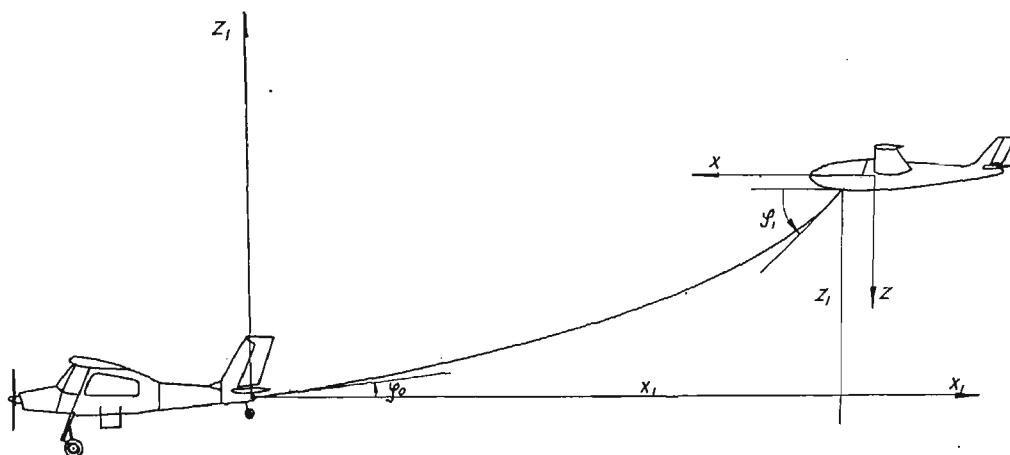
3. Charakterystyka liny holowniczej

W poniższej tabelicy podano ciężary jednostkowe q lin holowniczych, współczynniki wydłużalności określone jako $\lambda = \Delta l / Pl_0$ i średnice d lin używanych obecnie w Polsce do holowania szybowców [14].

Typ liny	Opis liny	d (m)	q (kG/m)	λ (1/kG)
<i>A</i>	Lina stylonowa zwijana	0,0070	0,0308	0,00117
<i>B</i>	Linia stylonowa w oplocie	0,0067	0,0326	0,00025
<i>C</i>	Lina stylonowa w oplocie	0,0083	0,0462	0,00035
<i>D</i>	Lina konopna zwijana	0,0113	0,0771	0,00021

4. Konfiguracja liny holowniczej

Przy rozpatrywaniu zagadnień równowagi i stateczności szybowców w locie holowanym konieczna jest znajomość siły T_1 na zaczepie szybowca zależnej od współrzędnych końców liny holowniczej x_1, z_1 oraz kątów φ_0 i φ_1 względem linii lotu, jakie lina tworzy na zaczepach samolotu i szybowca (rys. 3).



Rys. 3. Wielkości geometryczne charakteryzujące hol szybowca

Rozpatrzmy przypadek holu szybowca, gdy samolot holujący znajduje się w ustalonym, poziomym locie prostoliniowym, natomiast szybowiec może zajmować dowolne położenie w płaszczyźnie pionowej zgodnej z linią lotu.

Linę holowniczą traktujemy jako cięgno idealnie wiotkie, ciężkie, obciążane siłami aerodynamicznymi. W przypadku liny holowniczej można pominąć momenty zginające, wynikające ze sztywności liny [5, 7 i 8].

Rozpatrzono element liny dl obciążony siłą naciągu liny T i $T+dT$, ciężarem własnym qdl , siłami aerodynamicznymi: styczną $t \cos^2 \varphi dl$ i normalną $n \sin^2 \varphi dl$ (rys. 4). Wprowadzono oznaczenia

$$n = \frac{1}{2} \rho d V^2 C_n, \quad t = \frac{1}{2} \rho d V^2 C_t.$$

Równania rzutów sił na kierunek styczny i normalny do elementu liny mają postać

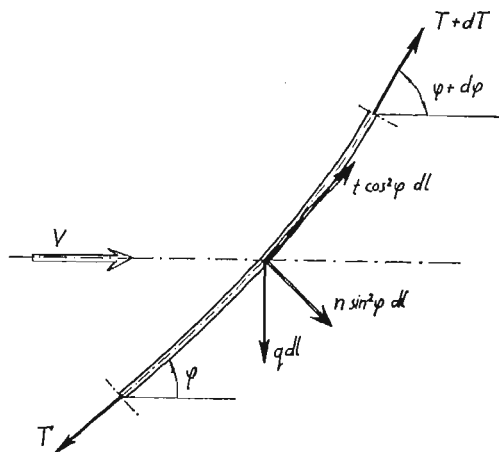
$$(4.1) \quad \begin{aligned} -T + (T+dT) \cos(d\varphi) + t \cos^2 \varphi dl - q \sin \varphi dl &= 0, \\ -(T+dT) d\varphi + n \sin^2 \varphi dl + q \cos \varphi dl &= 0. \end{aligned}$$

Po przekształceniach, pominięciu małych wyższego rzędu i wprowadzeniu bezwymiarowego współczynnika ciężarowego liny

$$C_q = \frac{q}{\frac{1}{2} \rho d V^2}$$

otrzymano

$$(4.2) \quad \frac{dT}{T} = \frac{\frac{C_q}{C_n} \sin \varphi - \frac{C_t}{C_n} \cos^2 \varphi}{\frac{C_q}{C_n} \cos \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi.$$



Rys. 4. Rozkład sił działających na element liny o długości dl

Po wprowadzeniu nowych stałych [10]

$$\frac{C_q}{C_n} = 2 \operatorname{ctg} 2\psi, \quad \frac{C_t}{C_n} = 2 \frac{C_t}{C_q} \operatorname{ctg} 2\psi$$

i scałkowaniu (4.2) otrzymano zależność

$$(4.3) \quad \frac{T e^\eta}{\tau} = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} = K_1,$$

gdzie

$$(4.4) \quad \tau = \left(\frac{\operatorname{ctg} \psi - \cos \varphi}{\operatorname{tg} \psi + \cos \varphi} \right)^{\cos 2\psi}$$

$$(4.5) \quad \eta = \frac{C_t}{C_q} \cos 2\psi \left[-\frac{2\varphi}{\sin 2\psi} + \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \psi}} \operatorname{arctgh} \left(\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} \psi}{1 + \operatorname{tg} \psi}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2 \operatorname{ctg}^2 \psi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \psi - 1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{ctg} \psi - 1}{\operatorname{ctg} \psi + 1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right].$$

Analogicznie do τ i η otrzymamy zależności na τ_1 i η_1 podstawiając φ_1 zamiast φ do (4.4) i (4.5).

Stosując zależność (4.3) możemy obliczyć naciąg liny w dowolnym jej punkcie, o ile znamy wielkości φ i T na jednym z jej końców.

Z drugiego równania (4.1) otrzymamy

$$(4.6) \quad Td\varphi = (q\cos\varphi + n\sin^2\varphi)dl.$$

Po podstawieniu zależności (4.3) do (4.6) otrzymamy długość liny holowniczej w postaci całkowej

$$(4.7) \quad l_1 = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} \frac{2}{\varrho dV^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\tau e^{-\eta}}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi.$$

Współrzędne końców liny holowniczej x_1 i z_1 (rys. 3) obliczymy wychodząc z zależności geometrycznych

$$dx_1 = dl \cos\varphi, \quad dz_1 = dl \sin\varphi;$$

otrzymamy

$$(4.8) \quad x_1 = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} \frac{2}{\varrho dV^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\tau e^{-\eta} \cos\varphi}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi,$$

$$(4.9) \quad z_1 = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} \frac{2}{\varrho dV^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\tau e^{-\eta} \sin\varphi}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi.$$

Zmienimy granice całkowania w celu wprowadzenia nowych funkcji

$$(4.10) \quad \mu = \frac{2}{\varrho dV^2} \int_0^{\varphi} \frac{\tau e^{-\eta}}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi,$$

$$(4.11) \quad \sigma = \frac{2}{\varrho dV^2} \int_0^{\varphi} \frac{\tau e^{-\eta} \cos\varphi}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi,$$

$$(4.12) \quad \nu = \frac{2}{\varrho dV^2} \int_0^{\varphi} \frac{\tau e^{-\eta} \sin\varphi}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi.$$

Korzystając z funkcji (4.10)–(4.12) i zależności (4.3) określono długość liny holowniczej:

$$(4.13) \quad l_1 = K_1(\mu_1 - \mu_0)$$

i współrzędne końca liny na zaczepie szybowca względem zaczepu samolotu holującego:

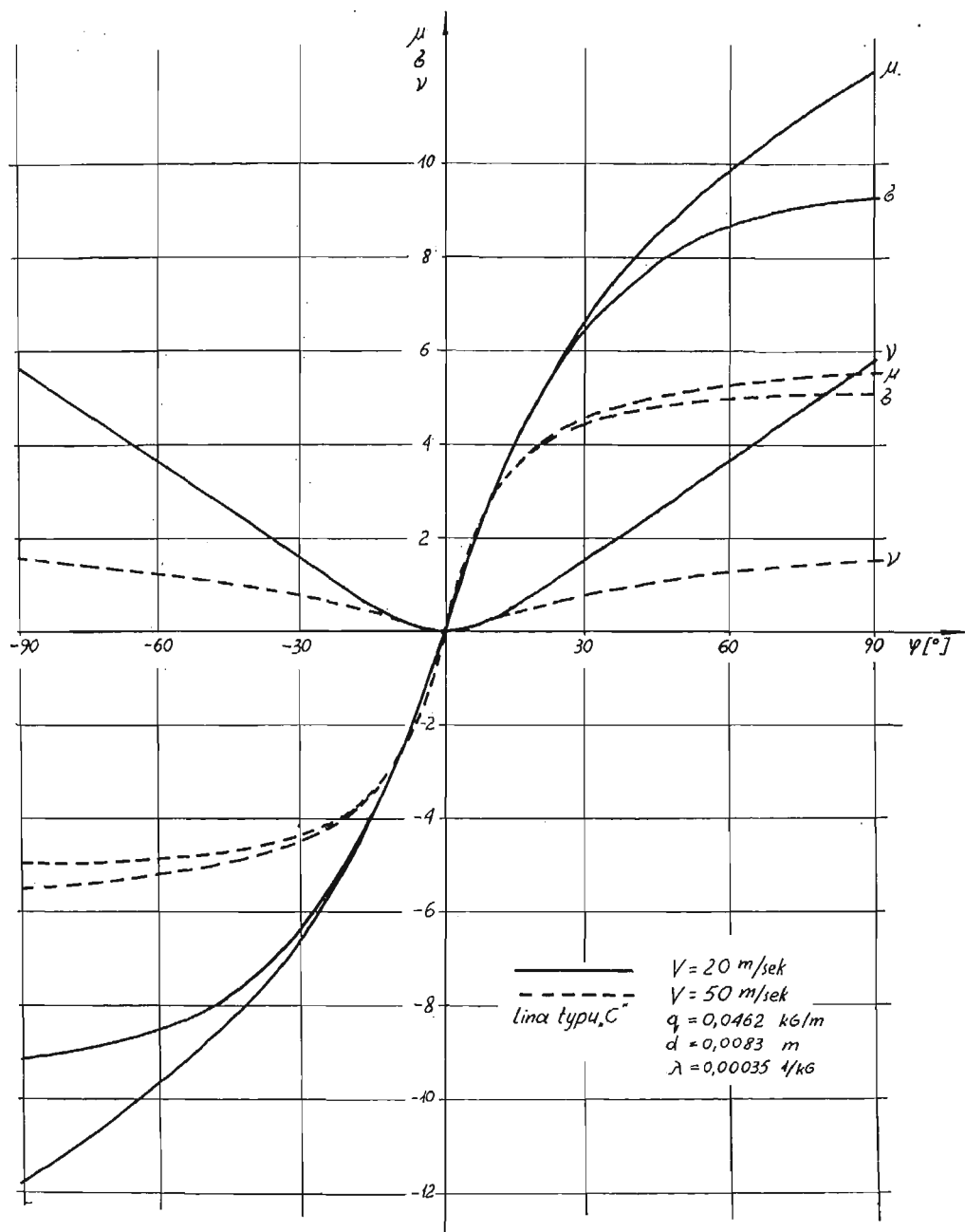
$$(4.14) \quad x_1 = K_1(\sigma_1 - \sigma_0),$$

$$(4.15) \quad z_1 = K_1(\nu - \nu_0).$$

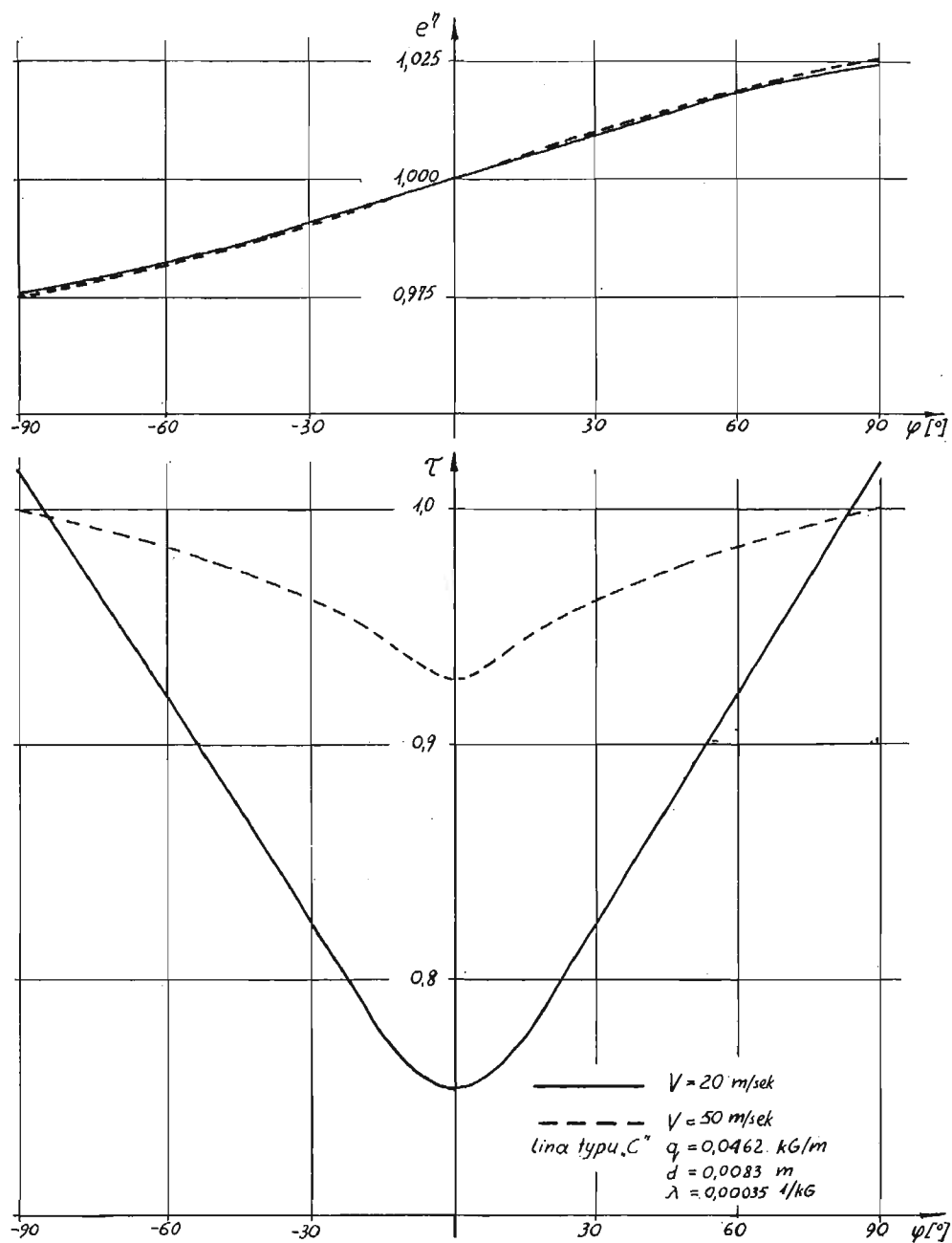
Dla lin wydłużalnych stosowanych do holu przyjęto

$$(4.16) \quad l_1 = l_0(1 + \lambda T_1);$$

uwzględnienie zmiany naciągu T wzdłuż liny daje różnice w stosunku do l_1 obliczonej z (4.16) $\approx 0,01\%$ a w stosunku do Δl_1 (wydłużenia) $\approx 3\%$.



Rys. 5a. Funkcje długości μ i współrzędnych końców linii σ i ν dla linii typu C przy prędkości holu 20 i 50 m/sec.



Rys. 5b. Funkcje τ i e'' dla liny typu C przy prędkości holu 20 i 50 m/sec.

Na rysunkach 5a i 5b przedstawiono przykładowo funkcje μ , σ , ν , τ i e'' otrzymane po numerycznym scałkowaniu (4.10)–(4.12) dla liny typu C i prędkości holu $V = 20$ m/sek. i 50 m/sek.

Kąt holu φ_1 i odpowiadający mu C_z holu określimy na podstawie p. 6, co umożliwi obliczenie siły na zaczepie szybowca T_1 . Z zależności (4.16) obliczymy całkowitą długość liny l_1 i z wykresów na rys. 5 dla wartości φ_1 znajdziemy μ_1 , σ_1 i ν_1 , co pozwala ze wzorów (4.3) i (4.13) obliczyć μ_0 . Z wykresu na rys. 5 znajdziemy dla wartości μ_0 kąt φ_0 , a następnie σ_0 i ν_0 . Stosując (4.14) i (4.15) obliczymy współrzędne końców liny x_1 i z_1 .

5. Współczynniki sił pochodzące od liny holowniczej (pochodne linowe)

W celu określenia sił pochodzących od liny holującej zakładamy liniowy charakter zmian sił w zależności od przemieszczenia końców liny względem siebie.

Przez analogię do *pochodnych aerodynamicznych*, stosowanych przy rozpatrywaniu stateczności samolotów, wprowadzono *pochodne linowe* (współczynniki sił), które określono następująco:

$$X_{x_1}^l = \frac{\partial X_1^l}{\partial x_1}, \quad X_{z_1}^l = \frac{\partial X_1^l}{\partial z_1},$$

$$Z_{x_1}^l = \frac{\partial Z_1^l}{\partial x_1}, \quad Z_{z_1}^l = \frac{\partial Z_1^l}{\partial z_1}.$$

Zmiany sił pochodzące od liny holowniczej przedstawiono za pomocą pochodnych liniowych

$$(5.1) \quad \begin{aligned} dX_1^l &= X_{x_1}^l dx_1 + X_{z_1}^l dz_1, \\ dZ_1^l &= Z_{x_1}^l dx_1 + Z_{z_1}^l dz_1. \end{aligned}$$

Siła T_1 pochodząca od liny holującej jest przyłożona na zaczepie pod kątem φ_1 w stosunku do linii lotu, a odpowiednie jej składowe są:

$$(5.2) \quad X_1^l = T_1 \cos \varphi_1, \quad Z_1^l = T_1 \sin \varphi_1.$$

Zmianę siły otrzymamy po zróżniczkowaniu zależności (5.2)

$$(5.3) \quad \begin{aligned} dX_1^l &= dT_1 \cos \varphi_1 - T_1 d\varphi_1 \sin \varphi_1, \\ dZ_1^l &= dT_1 \sin \varphi_1 + T_1 d\varphi_1 \cos \varphi_1. \end{aligned}$$

Jeżeli do (5.3) wprowadzimy zależność na dT_1 i $T_1 d\varphi_1$ wyrażone przez elementarne przesunięcia dx_1 i dz_1 oraz T_1 , l_1 , x_1 , z_1 , φ_1 i φ_0 , to po przyrównaniu do (5.1) obliczymy pochodne linowe $X_{x_1}^l$, $X_{z_1}^l$, $Z_{x_1}^l$ i $Z_{z_1}^l$.

Po przekształceniu (4.2) i (4.3) i wprowadzeniu do (4.6) otrzymano zależność na elementarną długość liny

$$(5.4) \quad dl = \frac{T_1}{\tau_1} e^{\eta_1 - \eta} \frac{\tau \tau'}{C_q \sin \varphi} \frac{2}{\rho dV^2} d\varphi,$$

i analogicznie

$$(5.5) \quad dx = \frac{T_1}{\tau_1} e^{\eta_1 - \eta} \frac{\tau \tau' \cos \varphi}{C_q \sin \varphi} \frac{2}{\rho dV^2} d\varphi,$$

$$(5.6) \quad dz = \frac{T_1}{\tau_1} e^{\eta_1 - \eta} \frac{\tau \tau'}{C_q} \frac{2}{\rho dV^2} d\varphi.$$

Korzystając z zależności (5.4)–(5.6) otrzymano trzy równania, które przedstawiają sobą zmianę długości liny i zmiany współrzędnych położenia końców liny pod wpływem zmiany siły dT_1 i kątów holu $d\varphi_1$ i $d\varphi_0$ analogicznie do [10]:

$$(5.7) \quad \frac{l_1}{T_1} dT_1 + \frac{\tau'_1}{\tau_1} d\varphi_1 \left(\frac{T_1 \tau_1}{\sin \varphi_1} \frac{2}{\rho dV^2 C_q} - \tau_1 l_1 \right) - \frac{T_1 \tau_0}{\sin \varphi_0} \frac{2}{\rho dV^2 C_q} \frac{\tau'_0}{\tau_1} e^{\eta_1 - \eta_0} d\varphi_0 = l_1 \lambda dT_1,$$

$$(5.8) \quad \frac{x_1}{T_1} dT_1 + \frac{\tau'_1}{\tau_1} d\varphi_1 \left(\frac{T_1 \tau_1 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} \frac{2}{\rho dV^2 C_q} - \tau_1 x_1 \right) + \\ - \frac{T_1 \tau_0 \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} \frac{2}{\rho dV^2 C_q} \frac{\tau'_0}{\tau_1} e^{\eta_1 - \eta_0} d\varphi_0 = l_1 \cos \varphi_1 \lambda dT_1 + dx_1,$$

$$(5.9) \quad \frac{z_1}{T_1} dT_1 + \frac{\tau'_1}{\tau_1} d\varphi_1 \left(T_1 \tau_1 \frac{2}{\rho dV^2 C_q} - \tau_1 z_1 \right) - T_1 \tau_0 \frac{2}{\rho dV^2 C_q} \frac{\tau'_0}{\tau_1} e^{\eta_1 - \eta_0} d\varphi_0 = l_1 \sin \varphi_1 \lambda dT_1 + dz_1.$$

Po przekształceniu równań (5.7)–(5.9) i wyeliminowaniu $\tau'_0 d\varphi_0$ oraz $\tau'_1 d\varphi_1$ otrzymano zależność

$$(5.10) \quad dT_1 = \frac{1}{\delta(1 - ql_1 \lambda \sin \varphi_1)} \{ dx_1 [T_1(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) - q \sin \varphi_1 (z_1 - l_1 \sin \varphi_0)] + \\ + dz_1 [T_1(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) - q \sin \varphi_1 (l_1 \cos \varphi_0 - x_1)] \},$$

$$(5.11) \quad T_1 d\varphi_1 = \frac{q \cos \varphi_1 + n \sin^2 \varphi_1}{\delta(1 - ql_1 \lambda \sin \varphi_1)} \{ dx_1 [l_1 \sin \varphi_0 - z_1 + \lambda T_1 l_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0)] + \\ + dz_1 [x_1 - l_1 \cos \varphi_0 + \lambda T_1 l_1 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1)] \},$$

gdzie

$$(5.12) \quad \delta = x_1(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) + z_1(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) - l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_0).$$

Podstawiając zależności (5.10) i (5.11) do równań (5.3) i porządkując względem dx_1 i dz_1 otrzymamy pochodne linowe w postaci:

$$(5.13) \quad \begin{aligned} X'_{x_1} &= A_1 X'_{x_1} - A_2 X''_{x_1}, & X'_{z_1} &= A_1 X'_{z_1} - A_2 X''_{z_1}, \\ Z'_{x_1} &= A_1 Z'_{x_1} + A_2 Z''_{x_1}, & Z'_{z_1} &= A_1 Z'_{z_1} + A_2 Z''_{z_1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.14) \quad A_1 = \frac{1}{1 - \lambda q l_1 \sin \varphi_1}, \quad A_2 = \frac{\lambda T_1}{1 - \lambda q l_1 \sin \varphi_1}.$$

Człony X'_{x_1} , X'_{z_1} , Z'_{x_1} i Z'_{z_1} stanowią pochodne linowe obliczone przez S. NEUMARKA [10] dla niewydłużalnych lin. W przypadku gdy współczynnik wydłużalności $\lambda = 0$ wyrażenia (5.13) na pochodne linowe pokrywają się z wynikami S. Neumarka

$$(5.15) \quad \begin{aligned} X'_{x_1} &= \frac{1}{\delta} [T_1 \cos \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) + n \sin^3 \varphi_1 (z_1 - l_1 \sin \varphi_0)], \\ X'_{z_1} &= \frac{1}{\delta} [T_1 \cos \varphi_1 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) + n \sin^3 \varphi_1 (l_1 \cos \varphi_0 - x_1)], \\ Z'_{x_1} &= \frac{1}{\delta} [T_1 \sin \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) - (q + n \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1) (z_1 - l_1 \sin \varphi_0)], \\ Z'_{z_1} &= \frac{1}{\delta} [T_1 \sin \varphi_1 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) - (q + n \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1) (l_1 \cos \varphi_0 - x_1)]. \end{aligned}$$

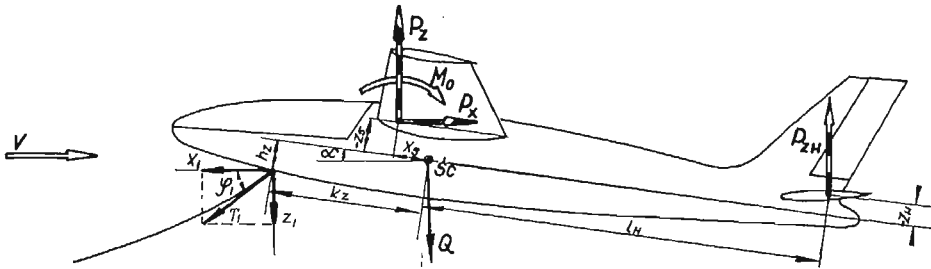
Drugie człony pochodnych linowych mają postać:

$$\begin{aligned}
 X''_{x_1} &= \frac{l_1}{\delta} \sin \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) (q \cos \varphi_1 + n \sin^2 \varphi_1), \\
 X''_{z_1} &= \frac{l_1}{\delta} \sin \varphi_1 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) (q \cos \varphi_1 + n \sin^2 \varphi_1), \\
 Z''_{x_1} &= \frac{l_1}{\delta} \cos \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) (q \cos \varphi_1 + n \sin^2 \varphi_1), \\
 Z''_{z_1} &= \frac{l_1}{\delta} \cos \varphi_1 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) (q \cos \varphi_1 + n \sin^2 \varphi_1).
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

Korzystając ze wzorów (5.12)–(5.16) stosunkowo prosto obliczymy pochodne linowe. Są one zależne od $\varphi_1, \varphi_0, T_1, l_1, x_1, z_1, \lambda, q$ i n , które to wielkości obliczymy na podstawie p. 4 niniejszej pracy.

6. Równowaga podłużna szybowca w locie holowanym

W ustalonym poziomym locie holowanym musi zachodzić równowaga sił i momentów działających na szybowiec (rys. 6).



Rys. 6. Rozkład sił i momentów działających na szybowiec w locie holowanym oraz zależności geometryczne

Otrzymano trzy równania równowagi

$$(6.1) \quad P_z + P_{zH} - Q - T_1 \sin \varphi_1 = 0,$$

$$(6.2) \quad T_1 \cos \varphi_1 - P_x = 0,$$

$$(6.3) \quad M_0 + P_z (x_s \cos \alpha - z_s \sin \alpha) + P_x (x_s \sin \alpha + z_s \cos \alpha) + P_{zH} (l_H \cos \alpha + z_H \sin \alpha) + T_1 \cos \varphi_1 (h_z \cos \alpha - k_z \sin \alpha) - T_1 \sin \varphi_1 (h_z \sin \alpha + k_z \cos \alpha) = 0.$$

Z równań (6.1) i (6.2) po przekształceniu i podzieleniu stronami otrzymano

$$(6.4) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{P_z - Q}{P_x} + \frac{P_{zH}}{P_x}.$$

Do równania (6.4) podstawiono zależność na siłę nośną usterzenia P_{zH} [4]

$$(6.5) \quad P_{zH} = \frac{1}{2} \rho S_H V_H^2 \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H} \left(\alpha - \varepsilon + \alpha_{zH} + \frac{\partial C_{zH}}{\partial \beta_H} \frac{\partial \alpha_H}{\partial C_{zH}} \beta_H \right)$$

oraz zależności na siłę nośną szybowca P_z i całkowity opór P_x przedstawione za pomocą współczynników

$$P_z = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_z, \quad P_x = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x.$$

Otrzymano ograniczenie kąta holu φ_P ze względu na równowagę sił przy skrajnych wychyleniach steru wysokości $+\beta_{H\max}$ (do dołu) i $-\beta_{H\min}$ (do góry)

$$(6.6) \quad \operatorname{tg} \varphi_P = \frac{1}{C_x} \left\{ C_z \left[1 + \frac{S_H}{S} \left(\frac{V_H}{V} \right)^2 \frac{a_1}{a} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{du} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{S_H}{S} \left(\frac{V_H}{V} \right)^2 a_1 \left(a_{zH} \pm \frac{a_2}{a_1} \beta_{H\max} \right) - \frac{2Q}{\rho S V^2} \right\},$$

gdzie

$$a = \frac{dC_z}{du}, \quad a_1 = \frac{\partial C_{zH}}{\partial u_H}, \quad a_2 = \frac{\partial C_{zH}}{\partial \beta_H}.$$

Z równania (6.2) wyznaczono siłę naciągu liny występującą na zaczepie szybowca

$$(6.7) \quad T_1 = \frac{P_x}{\cos \varphi_1}.$$

Siłę T_1 obliczymy znając opór szybowca P_x i kąt holu φ_1 . Z równania (6.3) określono siłę P_{zH} , która powinna występować na usterzeniu poziomym, aby zapewnić równowagę momentów w locie ustalonym. Po podstawieniu tak obliczonej siły P_{zH} do równania (6.4) otrzymano wzór na zależność kąta holu φ_1 od współczynnika siły nośnej szybowca C_z :

$$(6.8) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{C_{mbH} l a + \left(C_z - \frac{2Q}{\rho S V^2} \right) (l_H \cos \alpha + z_H \sin \alpha) + C_x (h_z \cos \alpha - k_z \sin \alpha)}{C_x [(l_H + k_z) \cos \alpha + (z_H + h_z) \sin \alpha]},$$

gdzie C_{mbH} jest to współczynnik momentu pochylającego szybowca bez usterzenia poziomego [4] i ma postać:

$$C_{mbH} = C_{m0} + C_z \bar{x}_s + (C_x - C_z \alpha) \bar{z}_s.$$

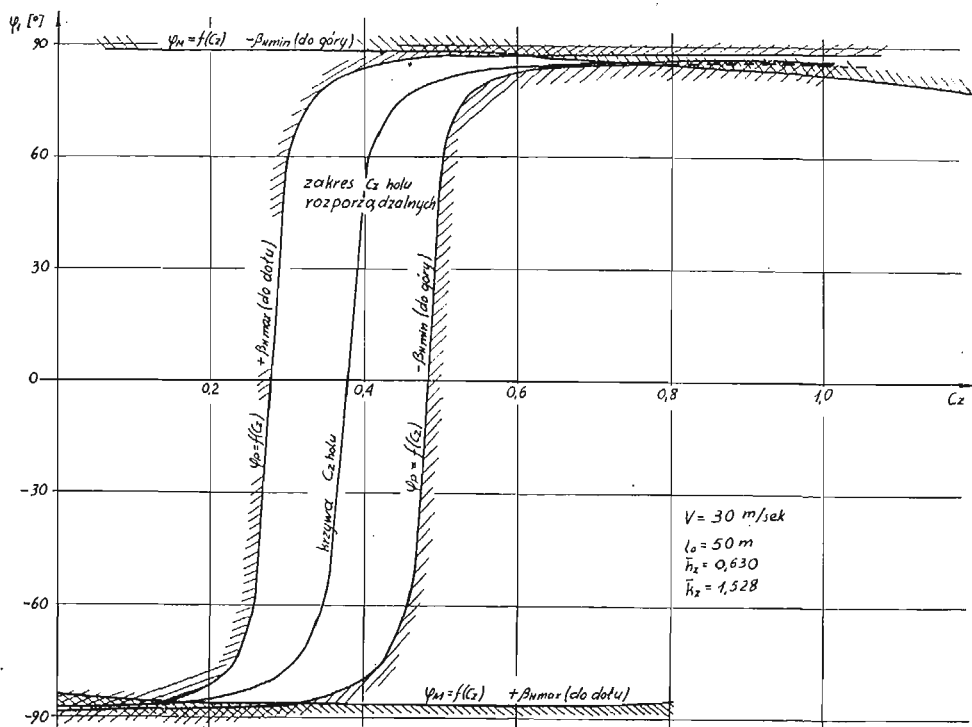
Zależność (6.8) określa dla danego współczynnika siły nośnej C_z jedyny możliwy kąt holu φ_1 , który zapewnia równowagę szybowca. Są to C_z holu niezbędne do lotu holowanego danego szybowca z określoną prędkością.

Ze względu na ograniczone wielkości siły nośnej P_{zH} na usterzeniu odpowiadające skrajnym wychyleniom steru wysokości, korzystając z równań (6.3) i (6.5) otrzymano ograniczenia kąta holu φ_M ze względu na równowagę momentów

$$\operatorname{tg} \varphi_M = \frac{C_{mbH} l a + C_x (h_z \cos \alpha - k_z \sin \alpha) - \frac{S_H}{S} \left(\frac{V_H}{V} \right)^2 a_1 (l_H \cos \alpha + z_H \sin \alpha) \left[\alpha \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) + \right. \\ \left. + a_{zH} \pm \frac{a_2}{a_1} \beta_{H\max} \right]}{C_x (k_z \cos \alpha + h_z \sin \alpha)}.$$

Na rysunku 7 wykreślono krzywą C_z holu w funkcji kąta holu φ_1 i naniesiono krzywe ograniczające ze względu na równowagę sił φ_P i ze względu na równowagę momentów φ_M . Z rysunku wynika, że równowaga szybowca w locie holowanym tylko wtedy jest moż-

liwa, gdy krzywa C_z holu znajduje się wewnątrz zakresu C_z rozporządzalnych. Warunek powyższy można uzyskać przez odpowiednie umieszczenie zaczepu holującego i właściwe rozwiązanie konstrukcyjne i aerodynamiczne usterzenia poziomego.



Rys. 7. Krzywa współczynników siły nośnej niezbędnych do lotu holowanego (C_z holu) w funkcji kąta φ_1 z naniesionymi ograniczeniami ze względu na równowagę sił $\varphi_P = f(C_z)$ i ze względu na równowagę momentów $\varphi_M = f(C_z)$ dla skrajnych wychyleń steru wysokości

7. Statyczna stateczność podłużna szybowca w locie holowanym

Pojęcie *statycznej stateczności* przyjęte w lotnictwie jest szeroko omówione w pracach poświęconych dynamice lotu samolotów [3, 4 i 11].

Warunkiem podłużnej stateczności statycznej w locie swobodnym jest

$$(7.1) \quad \frac{dC_m}{dC_z} < 0$$

dla przyjętego w niniejszej pracy dodatniego kierunku działania momentów (moment dodatni jest momentem zadzierającym szybowiec, powodującym wzrost kąta natarcia).

Stateczność statyczna mówi jedynie o występowaniu momentów wywołujących powrót szybowca do stanu równowagi w pierwszej chwili po zakłóceniu lotu [3, 4 i 11].

Przez analogię do lotu swobodnego proponuje się wprowadzenia pojęcia *stateczności statycznej* w locie holowanym określając $C_{mh} = f(C_z)$, tzn. współczynnik momentu pochylającego policzony względem środka ciężkości szybowca (rys. 6).

W postaci bezwymiarowej moment pochylający przedstawimy za pomocą współczynnika (7.2)

$$C_{mh} = C_{ma} + C_{ml},$$

gdzie

C_{mh} oznacza współczynnik momentu pochylającego szybowca w locie holowym,

C_{ma} współczynnik momentu pochylającego pochodzący od sił aerodynamicznych, działających na szybowiec,

C_{ml} współczynnik momentu pochylającego pochodzącego od liny holowniczej.

Po zróżniczkowaniu (7.2) względem C_z otrzymamy

$$\frac{dC_{mh}}{dC_z} = \frac{dC_{ma}}{dC_z} + \frac{dC_{ml}}{dC_z}.$$

Zgodnie z określeniami przyjętymi w lotnictwie [3, 4 i 11] otrzymamy zapas stateczności statycznej w locie holowanym $\bar{h}_h$ w postaci

$$(7.3) \quad \bar{h}_h = \bar{h}_1 + \bar{h}_l,$$

gdzie

$\bar{h}_1 = -\frac{dC_{ma}}{dC_z}$ zapas stateczności statycznej z trzymanym sterem w locie swobodnym,

$\bar{h}_l = -\frac{dC_{ml}}{dC_z}$ zmiana zapasu stateczności statycznej, pochodząca od liny holowniczej.

Zapasu stateczności statycznej $\bar{h}_1$ w locie swobodnym nie wyprowadzono w niniejszej pracy a przyjęto na podstawie pracy [4] w ostatecznej formie

$$(7.4) \quad \bar{h}_1 = \frac{S_H l_H}{S l_a} \left(\frac{V_H}{V} \right)^2 \frac{a_1}{a} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{du} \right) - \bar{x}_s - \frac{2C_z}{a} \left(1 - \frac{a}{\pi \Lambda_e} \right) \bar{z}_s.$$

Rozpatrzmy momenty sił pochodzących od liny holowniczej (rys. 6). Składowe X_1^l i Z_1^l siły pochodzącej od naciągu liny i przyłożonej na zaczepie szybowca zmieniają się w zależności od kąta natarcia α . Określimy je korzystając z pochodnych linowych wyprowadzonych w p. 5 niniejszej pracy:

$$(7.5) \quad \begin{aligned} X_1^l &= T_1 \cos \varphi_1 - X_{x_1}^l (h_z \sin \alpha + k_z \cos \alpha - k_z) + X_{z_1}^l (k_z \sin \alpha - h_z \cos \alpha + h_z), \\ Z_1^l &= T_1 \sin \varphi_1 - Z_{x_1}^l (h_z \sin \alpha + k_z \cos \alpha - k_z) + Z_{z_1}^l (k_z \sin \alpha - h_z \cos \alpha + h_z). \end{aligned}$$

Moment sił pochodzących od liny ma postać

$$(7.6) \quad M_l = X_1^l (h_z \cos \alpha - k_z \sin \alpha) - Z_1^l (k_z \cos \alpha + h_z \sin \alpha).$$

Po podstawieniu do (7.6) zależności (7.5) i (6.7) i uwzględnieniu, że kąt natarcia α jest mały

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

i podzieleniu równania momentów przez $\frac{1}{2} \rho S V^2 l_a$ otrzymano współczynnik momentu w postaci bezwymiarowej

$$(7.7) \quad \begin{aligned} C_{ml} = & -(\bar{x}_{x_1} \bar{h}_z - \bar{x}_{z_1} \bar{k}_z)(a \bar{h}_z - a^2 \bar{k}_z) l_a + (\bar{z}_{x_1} \bar{h}_z - \bar{z}_{z_1} \bar{k}_z)(\bar{k}_z a + \bar{h}_z a^2) l_a + \\ & + (\bar{x}_{x_1} \bar{k}_z + \bar{x}_{z_1} \bar{h}_z) l_{aza} \bar{h}_z \frac{a^2}{2} - (\bar{z}_{x_1} \bar{k}_z + \bar{z}_{z_1} \bar{h}_z) l_a \bar{k}_z \frac{a^2}{2} + \\ & + C_x (\bar{h}_z - \bar{k}_z \operatorname{tg} \varphi_1) - C_x a (\bar{k}_z + \bar{h}_z \operatorname{tg} \varphi_1) + C_x \frac{a^2}{2} (\bar{k}_z \operatorname{tg} \varphi_1 - \bar{h}_z), \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{x}_{x_1} = \frac{X'_{x_1}}{\frac{1}{2} \rho S V^2}, \quad \bar{k}_z = \frac{k_z}{l_a}, \quad \bar{h}_z = \frac{h_z}{l_a}$$

analogicznie do $\bar{x}_{x_1}$ otrzymano $\bar{x}_{z_1}$, $\bar{z}_{x_1}$ i $\bar{z}_{z_1}$.

Współczynnik oporu C_x i kąt natarcia α uzależniono od współczynnika siły nośnej C_z [4], a następnie zależność (7.7) zróżniczkowano względem C_z .

Otrzymano zmianę zapasu stateczności statycznej $\bar{h}_l$ pochodzącą od holu:

$$(7.8) \quad \bar{h}_l = \Delta \bar{h}(l) + \Delta \bar{h}(\bar{k}_z) + \Delta \bar{h}(\bar{h}_z),$$

gdzie

$$(7.9) \quad \Delta \bar{h}(l) = \frac{l_a}{a} \left\{ \bar{h}_z^2 \left[\bar{x}_{x_1} - \frac{C_z}{a} (\bar{x}_{z_1} + 2\bar{z}_{x_1}) \right] + \right. \\ \left. + \bar{k}_z^2 \left[\bar{z}_{z_1} + \frac{C_z}{a} (\bar{z}_{x_1} + 2\bar{x}_{z_1}) \right] - \bar{h}_z \bar{k}_z \left[\bar{x}_{z_1} + \bar{z}_{x_1} + \frac{3C_z}{a} \bar{x}_{x_1} - \bar{z}_{z_1} \right] \right\},$$

$$(7.10) \quad \Delta \bar{h}(\bar{k}_z) = \bar{k}_z \left[\frac{C_{x_0}}{a} + \frac{3C_z^2}{\pi a \Lambda_e} + \left(\frac{2C_z}{\pi \Lambda_e} - \frac{C_z C_{x_0}}{a^2} - \frac{2C_z^3}{\pi a^2 \Lambda_e} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \right],$$

$$(7.11) \quad \Delta \bar{h}(\bar{h}_z) = -\bar{h}_z \left[\frac{2C_z}{\pi \Lambda_e} - \frac{C_z C_{x_0}}{a^2} - \frac{2C_z^3}{\pi a^2 \Lambda_e} - \left(\frac{C_{x_0}}{a} + \frac{3C_z^2}{\pi a \Lambda_e} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \right];$$

$\Delta \bar{h}(l)$ pokazuje zmianę zapasu stateczności statycznej, pochodzącą od liny holowniczej. Zależy od własności liny (ciężaru jednostkowego, średnicy, wydłużalności, długości), konfiguracji liny i położenia zaczepu holującego. Wielkość ta powoduje wzrost lub zmniejszenie zapasu stateczności statycznej w zależności od konfiguracji;

$\Delta \bar{h}(\bar{k}_z)$ pokazuje zmianę zapasu stateczności statycznej, pochodzącą od przesunięcia zaczepu holującego poziomo względem środka ciężkości szybowca; zależy ono od danych aerodynamicznych szybowca. Przesunięcie zaczepu do przodu względem środka ciężkości szybowca powoduje, że wartość ta jest zawsze dodatnia i daje wzrost zapasu stateczności statycznej;

$\Delta \bar{h}(\bar{h}_z)$ pokazuje zmiany zapasu stateczności statycznej wywołaną przesunięciem zaczepu holującego pionowo względem środka ciężkości szybowca. Przesunięcie zaczepu poniżej środka ciężkości powoduje przeważnie spadek zapasu stateczności statycznej.

Zapas stateczności statycznej w locie holowanym $\bar{h}_h$ określany jest przez (7.3) po uprzednim obliczeniu $\bar{h}_l$ z (7.4) i $\bar{h}_l$ z (7.8).

Jak widzimy, zmiany zapasu stateczności statycznej, wywołane holem, zależą od wielu czynników i mogą w rezultacie powodować wzrost lub spadek stateczności statycznej w stosunku do zapasu stateczności $\bar{h}_1$, odpowiadającego lotowi swobodnemu z trzymanym sterem.

Wpływ poszczególnych czynników na zapas stateczności statycznej podłużnej będzie omówiony dokładnie w p. 9 niniejszej pracy.

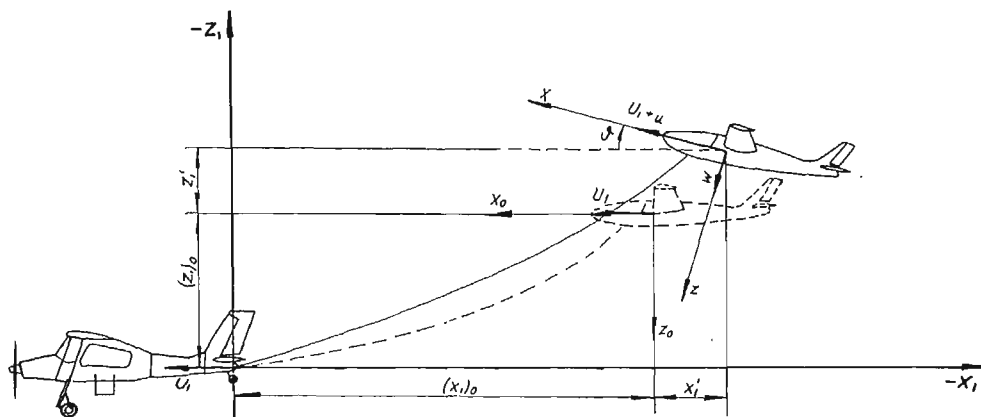
Zapas stateczności statycznej ma wpływ na stateczność dynamiczną szybowca. Występuje w różniczkowych równaniach ruchu jako współczynnik w pochodnej aerodynamicznej m_w .

8. Uproszczona analiza stateczności dynamicznej podłużnej szybowca w locie holowanym

Równania ruchu szybowca w locie holowanym wyprowadzono rozpatrując małe zakłócenia od ustalonego lotu poziomego, prostoliniowego, co pozwoliło na linearyzację równań. Linearyzacja umożliwiła uzyskanie rozwiązania w prostej postaci dla wygodniejszej analizy stateczności.

Małe zakłócenia oznaczono (rys. 8) następująco:

- x'_1, z'_1 zmiana położenia środka ciężkości szybowca względem układu x_1, z_1 związanego z samolotem,
- ϑ zmiana kąta pochylenia (obróć względem środka ciężkości),
- u, w składowe zmian prędkości związane z szybowcem w kierunkach osi x i z (związanych z szybowcem),
- q zmiana prędkości kątowej pochylenia,
- u_1, w_1 składowe zmian prędkości szybowca w kierunkach osi x_1 i z_1 (związanych z samolotem).



Rys. 8. Zmiana położenia szybowca wywołana zakłóceniem w stosunku do prostoliniowego poziomego lotu ustalonego; wzajemne zależności w przyjętych układach współrzędnych

Równania ruchu szybowca w locie swobodnym względem osi związanych z szybowcem (x, z) zostały podane w pracach [3, 4 i 11]. Po wprowadzeniu do nich sił pochodzących od liny holowniczej otrzymano

$$\begin{aligned}
 m\ddot{u} &= -mg\vartheta \cos \Theta_1 + X_u u + X_w w + X_q q + X_{x_1}^1 x'_1 + X_{z_1}^1 z'_1 + X_{\vartheta}^1 \vartheta, \\
 m(\dot{w} - U_1 q) &= mg\vartheta \sin \Theta_1 + Z_u u + Z_w w + Z_q q + Z_{x_1}^1 x'_1 + Z_{z_1}^1 z'_1 + Z_{\vartheta}^1 \vartheta, \\
 I_y \dot{q} &= M_u u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{x_1}^1 x'_1 + M_{z_1}^1 z'_1 + M_{\vartheta}^1 \vartheta, \\
 q &= \dot{\vartheta}.
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

Przyjęto, że zespół holujący (samolot+szybowiec) znajdował się w poziomym locie ustalonym, prostoliniowym $\Theta_1 = 0$. Uwzględniając powyższe założenie i korzystając z wyprowadzeń [3] otrzymano

$$\dot{x}' = u = u_1, \tag{8.2}$$

$$\dot{z}' = w - U_1 \vartheta = w_1. \tag{8.3}$$

Przekształcając zależność (8.3) otrzymano

$$w = \dot{z}' + U_1 \vartheta = w_1 + U_1 \vartheta. \tag{8.4}$$

Podstawiając zależności (8.2) i (8.4) do równań (8.1) otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych ze stałymi współczynnikami

$$\begin{aligned}
 m\ddot{u}_1 &= X_u u_1 + X_w (w_1 + U_1 \vartheta) + X_q q + X_{x_1}^1 x'_1 + X_{z_1}^1 z'_1 + X_{\vartheta}^1 \vartheta - mg\vartheta, \\
 m\dot{w}_1 &= Z_u u_1 + Z_w (w_1 + U_1 \vartheta) + Z_q q + Z_{x_1}^1 x'_1 + Z_{z_1}^1 z'_1 + Z_{\vartheta}^1 \vartheta, \\
 I_y \dot{q} &= M_u u_1 + M_w (w_1 + U_1 \vartheta) + M_{\dot{w}} (\dot{w}_1 + U_1 q) + M_q q + M_{x_1}^1 x'_1 + M_{z_1}^1 z'_1 + M_{\vartheta}^1 \vartheta, \\
 q &= \dot{\vartheta}.
 \end{aligned}$$

Współczynniki sił i momentów przy zmianach prędkości zwane są pochodnymi aerodynamicznymi [3, 4 i 11] i oznaczamy je. np.:

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u}, \quad Z_q = \frac{\partial Z}{\partial q}, \quad M_{\dot{w}} = \frac{\partial M}{\partial \dot{w}},$$

a przy przesunięciach — pochodnymi linowymi (p. 5) i [10] np.

$$X_{x_1}^l = \frac{\partial X_1^l}{\partial x_1}, \quad Z_{x_1}^l = \frac{\partial Z_1^l}{\partial x_1}, \quad M_{\vartheta}^l = \frac{\partial M^l}{\partial \vartheta}.$$

Pochodnych aerodynamicznych występujących w układzie równań (8.5) nie wyprowadzono w niniejszej pracy. Są one szeroko omówione i wyprowadzone w wielu pracach związanych z dynamiką lotu samolotów.

Korzystając z pracy [3] przytoczono w ostatecznej postaci pochodne aerodynamiczne w postaci bezwymiarowej stosowane w zakresie małych prędkości (nie uwzględniając ściśłości powietrza).

Pochodne sił i momentów aerodynamicznych w zależności od zmian prędkości:

$$(8.6) \quad \begin{aligned} x_u &= -C_x, & x_w &= \frac{1}{2} \left(C_z - \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \right), \\ z_u &= -C_z, & z_w &= -\frac{1}{2} \left(C_x + \frac{dC_z}{d\alpha} \right), \\ m_u &= C_m \frac{l_a}{l_H}. \end{aligned}$$

Pochodne sił aerodynamicznych w zależności od kąta pochylenia:

$$(8.7) \quad x_{\vartheta} = \frac{mg \cos \theta_1}{\rho S V^2} = \frac{mg}{\rho S V^2}.$$

Pochodne aerodynamiczne w zależności od kątowej prędkości pochylenia dla skrzydeł prostych zbieżnych:

$$(8.8) \quad \begin{aligned} x_q &= 0,6 \frac{S_H}{S} \left(C_{zH} - \frac{\partial C_{xH}}{\partial \alpha_H} \right) + \frac{1}{2 S l_H} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(C_z - \frac{\alpha C_x}{\partial \alpha} \right) l_x dy, \\ z_q &= -0,6 \frac{S_H}{S} \left(C_{xH} + \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H} \right) - \frac{1}{2 S l_H} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{dC_z}{d\alpha} \left(\frac{3}{4} - \frac{l_k}{l} \right) l^2 dy, \\ m_q &= -0,6 \frac{S_H}{S} \left(C_{xH} + \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H} \right) - \frac{1}{S l_H^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{1}{8} \frac{dC_z}{d\alpha} \left(1 - 2 \frac{l_k}{l} \right)^2 + \frac{1}{32} \left(2\pi - \frac{dC_z}{d\alpha} \right) \right] l^2 dy. \end{aligned}$$

Pochodna aerodynamiczna momentu pochyłającego względem prędkości zmiany kąta natarcia:

$$(8.9) \quad m_{\dot{w}} = -\frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H} \frac{d\epsilon}{d\alpha}.$$

Pochodna momentu pochyłającego względem prędkości pionowej zależy zarówno od własności aerodynamicznych szybowca, jak również od konfiguracji i charakterystyki liny holowniczej:

$$m_w^h = \frac{1}{2} \frac{l_a}{l_H} \frac{dC_m}{d\alpha}.$$

Korzystając z (7.2) i (7.3) otrzymamy

$$\frac{dC_m}{d\alpha} = \frac{dC_z}{d\alpha} \left(\frac{dC_{ma}}{dC_z} + \frac{dC_{ml}}{dC_z} \right) = -\frac{dC_z}{d\alpha} (\bar{h}_1 + \bar{h}_l).$$

Stąd

$$m_w^h = m_w + m_w^l,$$

gdzie

$$(8.10) \quad m_w = -\frac{1}{2} \frac{l_a}{l_H} \frac{dC_z}{d\alpha} \bar{h}_1, \quad m_w^l = -\frac{1}{2} \frac{l_a}{l_H} \frac{dC_z}{d\alpha} \bar{h}_l.$$

Pochodne liniowe sił względem przesunięć $X_{x_1}^l, X_{z_1}^l, Z_{x_1}^l$ i $Z_{z_1}^l$ końca liny zostały wyprowadzone w p. 5 niniejszej pracy.

Poniżej wyprowadzono pochodne liniowe momentu pochyłającego względem przesunięć i kąta pochylenia oraz pochodne liniowe sił względem kąta pochylenia.

Zmiany sił i momentów pochodzące od liny w zależności od przesunięcia i zmiany kąta pochylenia mają postać

$$\begin{aligned} dX_1^l &= X_{x_1}^l dx_1 + X_{z_1}^l dz_1 + X_g^l d\vartheta, \\ dZ_1^l &= Z_{x_1}^l dx_1 + Z_{z_1}^l dz_1 + Z_g^l d\vartheta, \\ dM_1^l &= M_{x_1}^l dx_1 + M_{z_1}^l dz_1 + M_g^l d\vartheta. \end{aligned}$$

Uwzględniając zmianę kąta pochylenia $d\vartheta$ otrzymamy (rys. 6)

$$\begin{aligned} dX_1^l &= X_{x_1}^l dx_1 + X_{z_1}^l dz_1 + (X_{x_1}^l h_z - X_{z_1}^l k_z + T_1 \sin \varphi_1) d\vartheta, \\ dZ_1^l &= Z_{x_1}^l dx_1 + Z_{z_1}^l dz_1 + (Z_{x_1}^l h_z - Z_{z_1}^l k_z - T_1 \cos \varphi_1) d\vartheta, \\ dM_1^l &= dX_1^l h_z - dZ_1^l k_z = (X_{x_1}^l h_z - Z_{x_1}^l k_z) dx_1 + (X_{z_1}^l h_z - Z_{z_1}^l k_z) dz_1 + \\ &\quad + [X_{x_1}^l h_z^2 - (X_{z_1}^l + Z_{x_1}^l) h_z k_z + Z_{z_1}^l k_z^2 + T_1 (h_z \sin \varphi_1 + k_z \cos \varphi_1)] d\vartheta. \end{aligned}$$

Pochodne linowe w powyższych równaniach są współczynnikami przy dx_1 , dz_1 i $d\vartheta$.

Poniżej podano pochodne linowe w postaci bezwymiarowej:

$$\begin{aligned} x_{x_1} &= \frac{X_{x_1}^l l_H}{\rho S V^2}, & x_{z_1} &= \frac{X_{z_1}^l l_H}{\rho S V^2}, & x_{g1} &= \frac{1}{\rho S V^2} (X_{x_1}^l h_z - X_{z_1}^l k_z + T_1 \sin \varphi_1), \\ z_{x_1} &= \frac{Z_{x_1}^l l_H}{\rho S V^2}, & z_{z_1} &= \frac{Z_{z_1}^l l_H}{\rho S V^2}, & z_g &= \frac{1}{\rho S V^2} (Z_{x_1}^l h_z - Z_{z_1}^l k_z - T_1 \cos \varphi_1), \\ (8.11) \quad m_{x_1} &= \frac{1}{\rho S V^2} (X_{x_1}^l h_z - Z_{x_1}^l k_z), \\ m_{z_1} &= \frac{1}{\rho S V^2} (X_{z_1}^l h_z - Z_{z_1}^l k_z), \\ m_g &= \frac{1}{\rho S V^2 l_H} [X_{x_1}^l h_z^2 - (X_{z_1}^l + Z_{x_1}^l) h_z k_z + Z_{z_1}^l k_z^2 + T_1 (h_z \sin \varphi_1 + k_z \cos \varphi_1)]. \end{aligned}$$

Znając wszystkie pochodne aerodynamiczne i liniowe przystąpiono do rozwiązywania układu równań (8.5). Układ równań (8.5) przekształcono do postaci bezwymiarowej dzieląc równania sił przez $\rho V^2 S$, równanie momentów przez $\rho V^2 S l_H$ oraz wprowadzając następujące wyrażenia zgodnie z nazwami przyjętymi w lotnictwie [3, 12 i 13]:

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{m}{\rho V S} \quad \text{czas aerodynamiczny,} \\ \mu_1 &= \frac{m}{\rho S l_H} \quad \text{względna gęstość samolotu,} \\ \bar{t} &= \frac{t}{\hat{t}} \quad \text{czas bezwymiarowy,} \\ j_y &= \frac{I_y}{m l_H^2} \quad \text{bezwymiarowy moment bezwładności,} \\ \bar{u}_1 = \frac{u_1}{V}; \bar{w}_1 = \frac{w_1}{V} & \quad \text{bezwymiarowe prędkości liniowe,} \\ \bar{q} &= q \hat{t} \quad \text{bezwymiarowa prędkość kątowa pochylenia,} \\ \bar{m}_u &= -\frac{\mu_1 m_u}{j_y}, \quad \bar{m}_w^h = -\frac{\mu_1 m_w^h}{j_y}, \quad \bar{m}_q = -\frac{m_q}{j_y}, \\ \bar{m}_{\dot{w}} &= -\frac{\mu_1 m_{\dot{w}}}{j_y}, \quad \bar{m}_{x_1} = -\frac{\mu_1 m_{x_1}}{j_y}, \quad \bar{m}_{z_1} = -\frac{\mu_1 m_{z_1}}{j_y}, \quad \bar{m}_{\vartheta} = -\frac{\mu_1 m_{\vartheta}}{j_y}. \end{aligned}$$

Przyjęto również, że osie związane z szybowcem zostały tak dobrane, aby kierunek prędkości V przed zakłóceniem równowagi był zgodny z kierunkiem obranej osi x , tzn. $U_1 = V$. Otrzymano układ równań w postaci bezwymiarowej

$$\begin{aligned} (8.12) \quad & \frac{d\bar{u}_1}{dt} - x_u \bar{u}_1 - x_w \bar{w}_1 - \frac{x_q}{\mu_1} \bar{q} - x_{x_1} \bar{x}_1 - x_{z_1} \bar{z}_1 + (x_{\vartheta} - x_w - x_{\vartheta_1}) \vartheta = 0, \\ & -z_u \bar{u}_1 + \frac{d\bar{w}_1}{dt} - z_w \bar{w}_1 - \frac{z_q}{\mu_1} \bar{q} - z_{x_1} \bar{x}_1 - z_{z_1} \bar{z}_1 - (z_w + z_{\vartheta}) \vartheta = 0, \\ & \bar{m}_u \bar{u}_1 + \bar{m}_{\dot{w}} \frac{d\bar{w}_1}{dt} + \bar{m}_w^h \bar{w}_1 + \frac{d\bar{q}}{dt} + \left(\bar{m}_q + \frac{\bar{m}_{\dot{w}}}{\mu_1} \right) \bar{q} + \bar{m}_{x_1} \bar{x}_1 + \bar{m}_{z_1} \bar{z}_1 + (\bar{m}_w^h + \bar{m}_{\vartheta}) \vartheta = 0, \\ & \bar{q} = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \bar{u}_1 = \frac{d\bar{x}_1}{dt}, \quad \bar{w}_1 = \frac{d\bar{z}_1}{dt}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie ogólne układu równań przewidujemy w postaci

$$\bar{x}_1 = x_0 e^{\bar{\lambda} \bar{t}}, \quad \bar{z}_1 = z_0 e^{\bar{\lambda} \bar{t}}, \quad \vartheta = \vartheta_0 e^{\bar{\lambda} \bar{t}}.$$

Po podstawieniu powyższych zależności do układu równań (8.12), podzieleniu przez $e^{\bar{\lambda} \bar{t}}$ i uporządkowaniu względem x_0 , z_0 , ϑ_0 otrzymano układ równań jednorodnych. Warunkiem rozwiązania tego układu jest, aby wyznacznik ze współczynników przy x_0 , z_0 i ϑ_0 był równy zeru. Po rozwinięciu wyznacznika i uporządkowaniu względem potęg $\bar{\lambda}$ otrzymano równanie charakterystyczne w postaci

$$(8.13) \quad \bar{\lambda}^6 + B_1 \bar{\lambda}^5 + (C_1 + C_1^!) \bar{\lambda}^4 + (D_1 + D_1^!) \bar{\lambda}^3 + (E_1 + E_1^!) \bar{\lambda}^2 + F_1^! \bar{\lambda} + G_1^! = 0,$$

gdzie współczynniki B_1 , C_1 , D_1 i E_1 są współczynnikami równania charakterystycznego czwartego stopnia w przypadku lotu swobodnego szybowca [3].

Współczynniki równania charakterystycznego (8.13) dały się rozdzielić na część odpowiadającą lotowi swobodnemu i część uwzględniającą wpływ holu.

Współczynniki równania charakterystycznego dla lotu swobodnego

$$\begin{aligned}
 B_1 = B &= -(x_u + z_w) + \bar{m}_q + (1 + z_q) \frac{\bar{m}_w}{\mu_1}, \\
 C_1 &= x_u z_w - x_w z_u - (x_u + z_w) \bar{m}_q + \left(-z_w + \frac{x_u + z_w}{\mu_1} + \frac{x_u z_q - x_q z_u}{\mu_1} \right) \bar{m}_w + \\
 &\quad + \left(1 + \frac{z_q}{\mu_1} \right) \bar{m}_w + \frac{x_q}{\mu_1} \bar{m}_u, \\
 D_1 &= (x_u z_w - x_w z_u) \bar{m}_q + \left[\left(\frac{1}{\mu_1} - 1 \right) (x_u z_w - x_w z_u) - z_u x_g \right] \bar{m}_w - \\
 &\quad - \left(x_u + \frac{x_u z_q - x_q z_u}{\mu_1} \right) \bar{m}_w + \left(x_w - x_g + \frac{x_w z_q - x_q z_w}{\mu_1} \right) \bar{m}_u, \\
 E_1 &= (z_w \bar{m}_u - z_u \bar{m}_w) x_g.
 \end{aligned}$$

Zmiany współczynników równania charakterystycznego wywołane holą:

$$\begin{aligned}
 C_1^I &= \left(1 + \frac{z_q}{\mu_1} \right) \bar{m}_w - x_{x_1} - z_{z_1} + \bar{m}_g + z_g \bar{m}_w, \\
 D_1^I &= x_u z_{z_1} - x_{z_1} z_u + x_{x_1} z_w - x_w z_{x_1} - (x_{x_1} + z_{z_1}) \bar{m}_q - \\
 &\quad - (x_u + z_w) \bar{m}_g + \left(x_{gI} z_u - x_u z_g - \frac{x_{x_1} + z_{z_1}}{\mu_1} + \frac{x_q z_{x_1} - x_{x_1} z_q}{\mu_1} \right) \bar{m}_w + \\
 &\quad + z_g \bar{m}_w + x_{gI} \bar{m}_u + \frac{x_q}{\mu_1} \bar{m}_{x_1} + \frac{z_q}{\mu_1} \bar{m}_{z_1} - \left(x_u + \frac{x_u z_q - x_q z_u}{\mu_1} \right) \bar{m}_w, \\
 E_1^I &= x_{x_1} z_{z_1} - x_{z_1} z_{x_1} + [x_{x_1} z_w - x_w z_{x_1} + (x_u - z_u) z_{z_1}] \bar{m}_q + \\
 &\quad + (x_u z_w - x_w z_u - x_{x_1} - z_{z_1}) \bar{m}_g + \left[\frac{x_u z_{z_1} - x_{z_1} z_u}{\mu_1} + \right. \\
 &\quad \left. + (x_{x_1} z_w - x_w z_{x_1}) \left(\frac{1}{\mu_1} - 1 \right) - z_g x_{x_1} - (x_g - x_{gI}) z_{x_1} \right] \bar{m}_w + \\
 &\quad + \left(\frac{x_q z_{x_1} - x_{x_1} z_q}{\mu_1} - x_u z_g + z_u x_{gI} - x_{x_1} - z_{z_1} \right) \bar{m}_w + \left(\frac{x_{z_1} z_q - x_q z_{z_1}}{\mu_1} - x_{gI} z_u + x_w z_g \right) \bar{m}_u + \\
 &\quad + \left(\frac{x_w z_q - x_q z_w}{\mu_1} + x_w - x_g - x_{gI} \right) \bar{m}_{x_1} + \left(\frac{z_u x_q - x_u z_q}{\mu_1} + z_w + z_g \right) \bar{m}_{z_1}, \\
 F_1^I &= F = (x_{x_1} z_{z_1} - x_{z_1} z_{x_1}) \left(\bar{m}_q + \frac{\bar{m}_w}{\mu_1} \right) + (x_u z_{z_1} - x_{z_1} z_u + x_{x_1} z_w - x_w z_{x_1}) \bar{m}_g + \\
 &\quad + [x_u z_{z_1} - x_{z_1} z_u - z_g x_{x_1} - (x_g - x_{gI}) z_{x_1}] \bar{m}_w + [z_w x_{z_1} - z_{z_1} x_w + z_g x_{z_1} - (x_g - x_{gI}) z_{z_1}] \bar{m}_u + \\
 &\quad + \left[\frac{x_{z_1} z_q - x_q z_{z_1}}{\mu_1} - z_g x_w + (x_g - x_{gI}) z_w \right] \bar{m}_{x_1} + \\
 &\quad + \left[\frac{z_{x_1} x_q - z_q x_{x_1}}{\mu_1} - z_g x_u - (x_g - x_{gI}) z_u + x_w z_u - x_u z_w \right] \bar{m}_{z_1}.
 \end{aligned}$$

$$G_1^I = G = (x_{x_1}z_{z_1} - x_{z_1}z_{x_1})(\bar{m}_g + \bar{m}_w^h) + [x_{z_1}z_w - x_wz_{z_1} + z_gx_{z_1} + (x_g - x_{gI})z_{z_1}]\bar{m}_{x_1} + \\ + [z_{x_1}x_w - z_wx_{x_1} - z_gx_{x_1} - (x_g - x_{gI})z_{x_1}]\bar{m}_{z_1}.$$

Kryteria stateczności Routha-Hurwitza, dotyczące małych zakłóceń ruchu ustalonego, stawiają warunek, aby wszystkie współczynniki równania charakterystycznego (8.13) były dodatnie:

$$(8.14) \quad B_1, C, D, E, F, G > 0$$

jak również, aby wyróżnik Routha był większy od zera [1]:

$$(8.15) \quad R = \Delta_0\Delta_2 - \Delta_1^2 > 0,$$

gdzie

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ D & C & B \\ F & E & D \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ D & C & B \\ 0 & G & F \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ F & E & D \\ 0 & G & F \end{vmatrix}$$

gdzie

$$B = B_1, \quad C = C_1 + C_1^I, \quad D = D_1 + D_1^I, \quad E = E_1 + E_1^I, \quad F = F_1^I, \quad G = G_1^I,$$

Dla stwierdzenia czy szybowiec jest stateczny w locie holowanym wystarczy sprawdzić kryteria Routha-Hurwitza (8.14) i (8.15).

W przypadku rozwiązania równania (8.13) pierwiastki otrzymane mają postać

$$(8.16) \quad \bar{\lambda}_n^h = \bar{\xi}_n^h \pm i\bar{\eta}_n^h$$

i dla szybowca statecznego współczynniki tłumienia są $\bar{\xi}_n^h < 0$, tzn. ruch jest tłumiony i szybowiec jest stateczny dynamicznie.

Znając pierwiastki równania charakterystycznego (wartości własne), możemy obliczyć wektory własne korzystając z dwóch równań układu 8.12 o postaci

$$(8.17) \quad (\bar{\lambda}_n^2 - x_u\bar{\lambda}_n - x_{x_1})\bar{x}_1^n - (x_w\bar{\lambda}_n + x_{z_1})\bar{z}_1^n - \left(\frac{x_q}{\mu_1}\bar{\lambda}_n - x_g + x_w + x_{gI}\right)\vartheta^n = 0, \\ - (z_u\bar{\lambda}_n + z_{x_1})\bar{x}_1^n + (\bar{\lambda}_n^2 - z_w\bar{\lambda}_n - z_{z_1})\bar{z}_1^n - \left(\frac{z_q}{\mu_1}\bar{\lambda}_n + z_w + z_g\right)\vartheta^n = 0,$$

gdzie $\bar{\lambda}_n$ są to odpowiednie wartości własne, a $\bar{x}_1^n$, $\bar{z}_1^n$ i ϑ^n odpowiadające im wektory własne.

Równania opisujące ruch szybowca po zakłóceniu otrzymamy w postaci

$$(8.18) \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{z}_1 \\ \vartheta \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^6 K_n \begin{bmatrix} \bar{x}_1^n \\ \bar{z}_1^n \\ \vartheta^n \end{bmatrix} e^{\bar{\lambda}_n \bar{t}}.$$

Stałe K_n obliczymy z warunków początkowych dla $\bar{t} = 0$.

9. Przykład liczbowy i wnioski

Jako przykład przeprowadzono obliczenia dla jednego z prototypowych szybowców wyczynowych. W obliczeniach zmieniano kolejno parametry holu tak, aby można było znaleźć wpływ poszczególnych czynników na stateczność szybowca w locie holowanym.

Jednocześnie przeprowadzono obliczenia stateczności w locie swobodnym i porównano je z wynikami obliczeń dla lotu holowanego. Do obliczeń przyjęto linię typu C najczęściej używaną w eksploatacji.

Na wykresach naniesiono liniami ciągłymi zmianę współczynników $\bar{\xi}$ tłumienia, a liniami przerywanymi zmianę częstości $\bar{\eta}$ w funkcji parametrów holu. Linie grube ciągłe i przerywane charakteryzują lot holowany szybowca, a linie cienkie lot swobodny szybowca w warunkach równoważnych lotowi holowanemu.

Wszystkie obliczenia wykonano na elektronicznej maszynie cyfrowej GIER według programów w języku GIER-ALGOL III. Rozwiązanie równania charakterystycznego 6 stopnia przeprowadzono metodą Bairstowa [15], co pozwoliło na znalezienie pierwiastków zespolonych.

9.1. Wpływ położenia szybowca względem samolotu holującego na stateczność. Szybowiec jest holowany na linii o długości $l_0 = 50$ m ze stałą prędkością $V = 30$ m/sek. Szybowiec może przemieszczać się w płaszczyźnie pionowej $z_1 = \pm 20$ m względem linii lotu samolotu holującego. Zmianę zapasu stateczności statycznej przedstawionej na rys. 9 obliczono z (7.4), (7.8) i (7.3).

Po rozwiązaniu równania charakterystycznego (8.13) otrzymano 6 pierwiastków (8.16), które stanowią wartości własne układu. Występują dwa pierwiastki zespolone sprzężone $\bar{\lambda}_1^h = \xi_1^h \pm i\eta_1^h$, $\bar{\lambda}_2^h = \xi_2^h \pm i\eta_2^h$, odpowiadające ruchom okresowym szybowca, oraz dwa pierwiastki rzeczywiste $\bar{\lambda}_3^h = \xi_3^h$ i $\bar{\lambda}_4^h = \xi_4^h$, odpowiadające ruchom aperiodycznym. Zmianę wartości własnych w zależności od położenia przedstawiono na rys. 10.

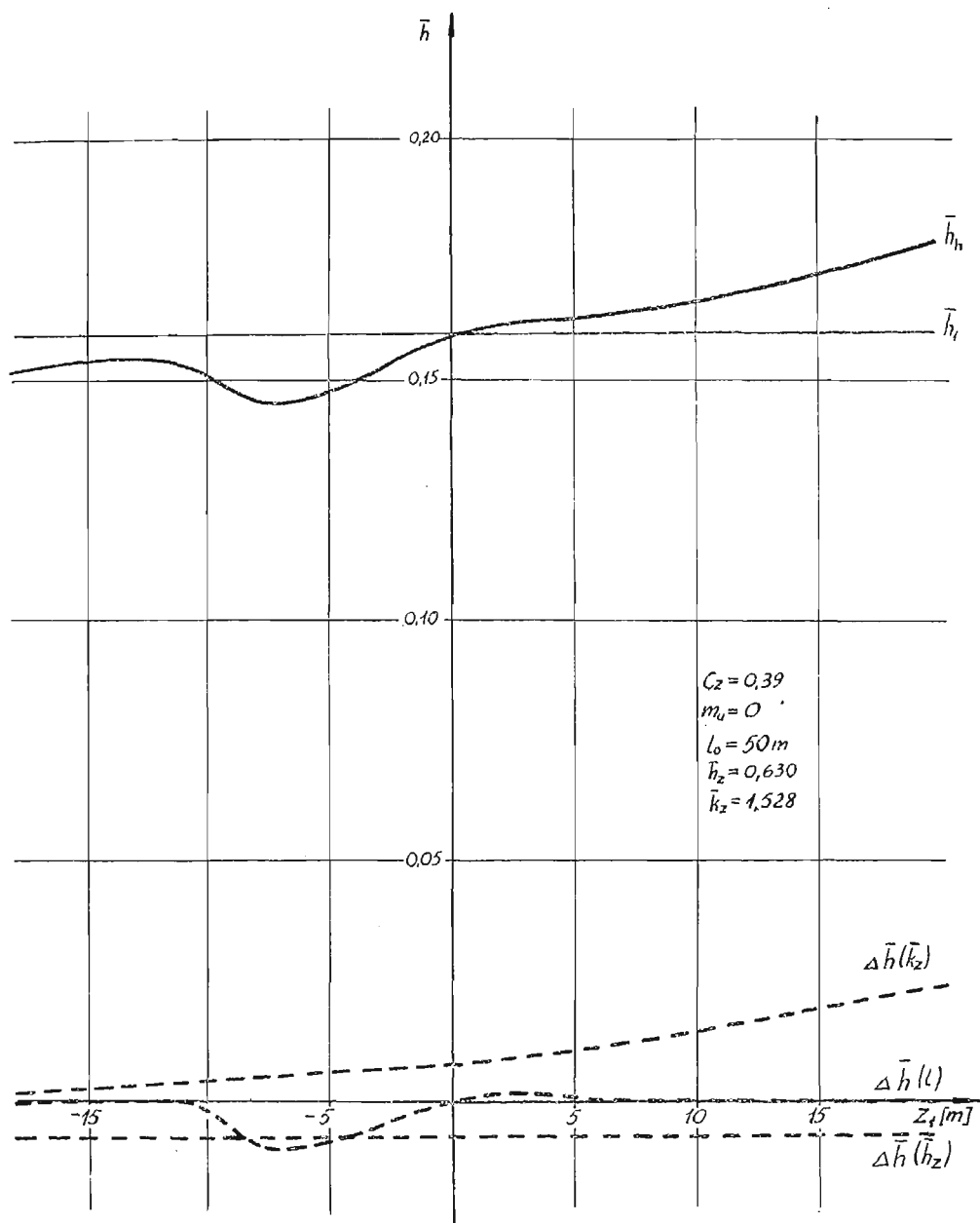
Przykładowo dla obranego kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$ podano poniżej obliczone z równań (8.17) wektory własne, co pozwoliło na właściwe określenie postaci własnych układu.

$\bar{\lambda}_n^h$	$-2,550 \pm i 2,541$	$0,168 \pm i 0,216$	$-0,256$	$-0,017$
x_1^n	$1 \pm i$	$1 \pm i$	1	1
$\bar{z}_1^n$	$0,046 \pm i 2,650$	$2,105 \pm i 0,641$	$-0,121$	23,800
ϑ^n	$0,476 + i 415$	$0,385 \pm i 33,200$	0,003	0,411

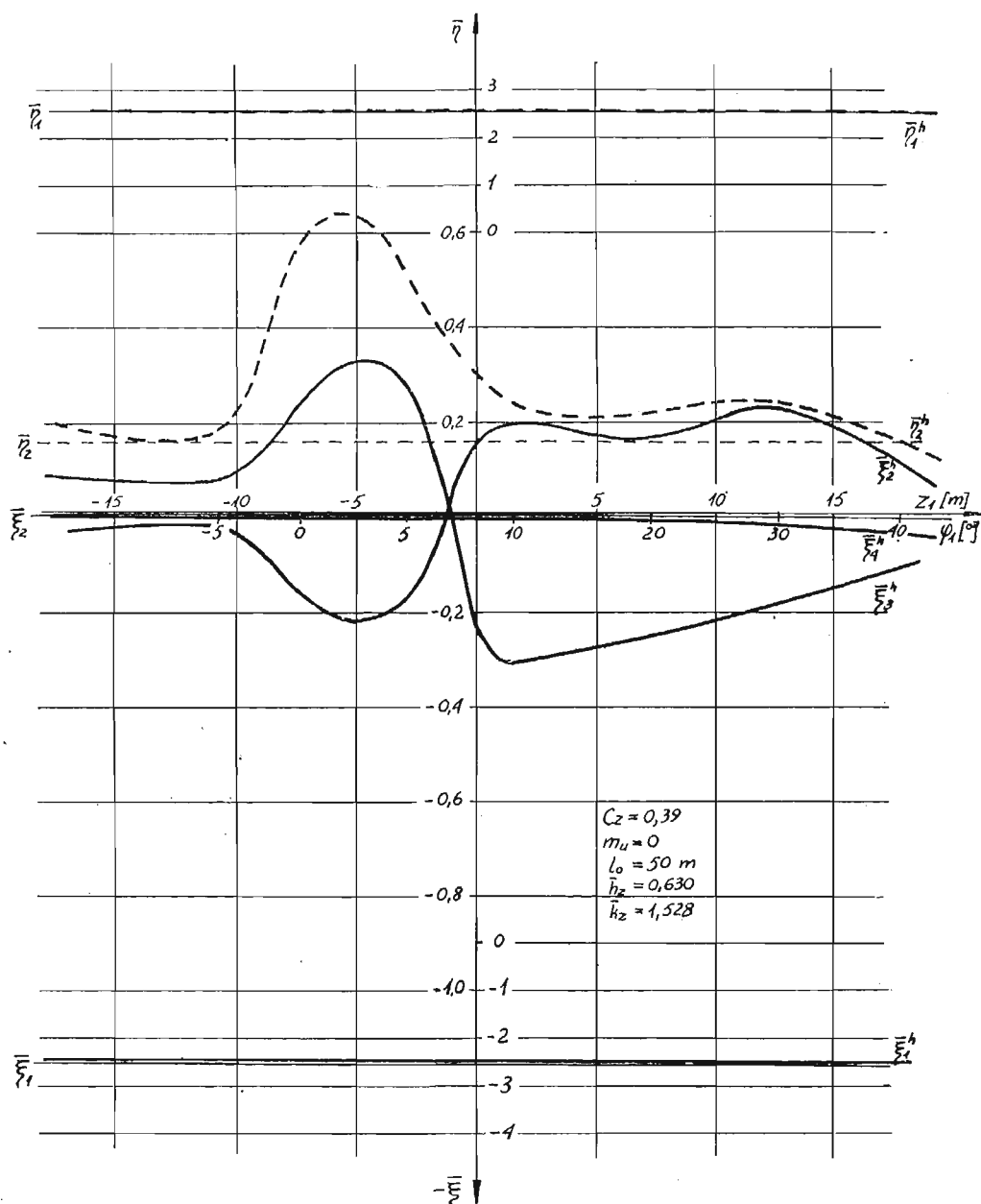
Wartości własne $\bar{\lambda}_1^h$ odpowiadają szybkim silnie tłumionym oscylacjom (duża częstość oscylacji) wokół środka ciężkości szybowca. Wartości własne $\bar{\lambda}_3^h$ odpowiadają aperiodycznym słabo tłumionym przesunięciom podłużnym szybowca, natomiast wartości własne $\bar{\lambda}_4^h$ charakteryzują aperiodyczne bardzo słabo tłumione przemieszczenia pionowe szybowca.

Wartość własna $\bar{\lambda}_2^h$ charakteryzuje okresowe ruchy fugoidalne [3] i [4] (o małej częstości, słabo tłumione). Ma ona wpływ na wszystkie trzy rodzaje ruchów. Najsilniej wpływa na oscylacje wokół środka ciężkości, a najmniej na przesunięcia poziome.

Obliczenie zmian $\bar{x}$, $\bar{z}$ i ϑ w funkcji czasu (8.18) w zależności od warunków początkowych wskazuje, że największy wpływ na stateczność szybowca w locie holowanym mają zakłócenia powodujące zadzieranie szybowca. Przesunięcia poziome wpływają silnie na oscylacje zaraz po zakłóceniu, natomiast przesunięcia pionowe uwidaczniają się po pewnym czasie (narastanie stopniowe amplitudy) i są słabe.



Rys. 9. Zmiana «zapasu stateczności statycznej» szybowca w funkcji położenia pionowego względem samolotu holującego



Rys. 10. Zmiana współczynników tłumienia $\bar{\xi}$ i częstości $\bar{\eta}$ w funkcji położenia pionowego względem samolotu holującego

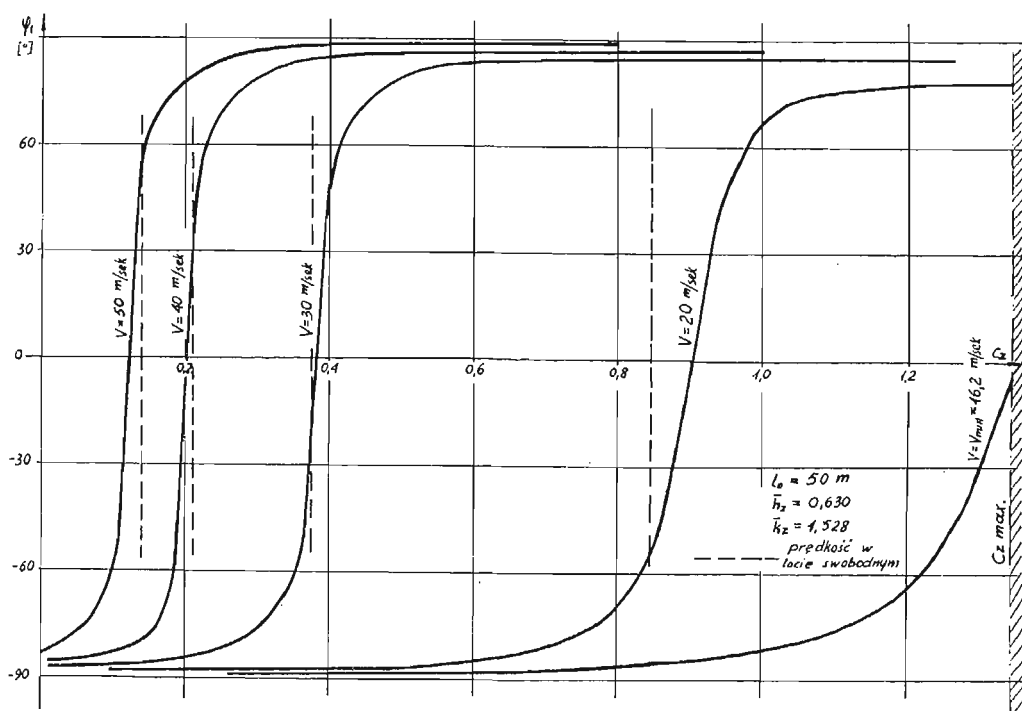
Zmiana położenia szybowca względem linii lotu samolotu holującego ma decydujący wpływ na wahania fugoidalne (wartości własne $\bar{\lambda}_2^h$) i aperiodyczne ruchy podłużne szybowca ($\bar{\lambda}_3^h$) (rys. 10). W locie szybowca poniżej linii lotu samolotu holującego otrzymano ruchy fugoidalne tłumione ($\bar{\xi}_2^h < 0$) i wahania podłużne nie tłumione ($\bar{\xi}_3^h > 0$).

Zmiana położenia szybowca nie wpływa na oscylacje szybkie ($\bar{\xi}_1^h$, i $\bar{\eta}_1^h$) jak również na aperiodyczne przesunięcia pionowe ($\bar{\xi}_4^h$).

Porównując wartości własne charakteryzujące lot swobodny szybowca widzimy (rys. 10), że hol zupełnie nie wpływa na oscylacje szybkie ($\bar{\xi}_1^h = \bar{\xi}_1$ i $\bar{\eta}_1^h = \bar{\eta}_1$), natomiast silnie wpływa na tłumienie wahań fugoidalnych ($\bar{\xi}_2^h \neq \bar{\xi}_2$) przy niewielkich zmianach częstości ($\bar{\eta}_2^h \approx \bar{\eta}_2$). W locie holowanym w stosunku do swobodnego występują dwie dodatkowe wartości własne $\bar{\lambda}_3$ i $\bar{\lambda}_4$, które przeważnie są wielkościami rzeczywistymi i charakteryzują ruchy aperiodyczne.

Przewyższenie szybowca w stosunku do samolotu holującego powoduje wzrost zapasu stateczności statycznej, rys. 9, nie powoduje to jednak wzrostu stateczności dynamicznej.

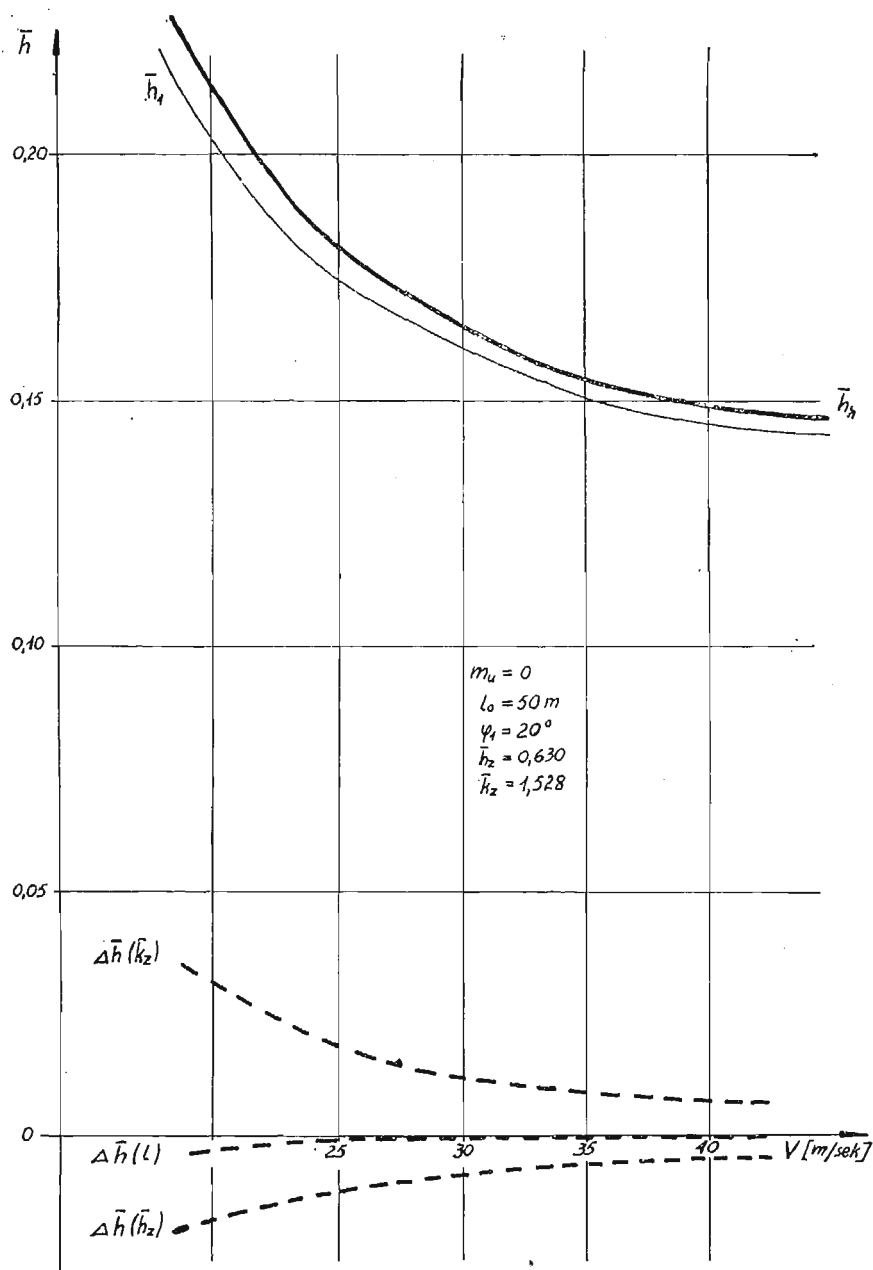
9.2. Wpływ prędkości holu na stateczność szybowca. Szybowiec jest holowany na linii C o długości $l_0 = 50$ m ze zmienną prędkością.



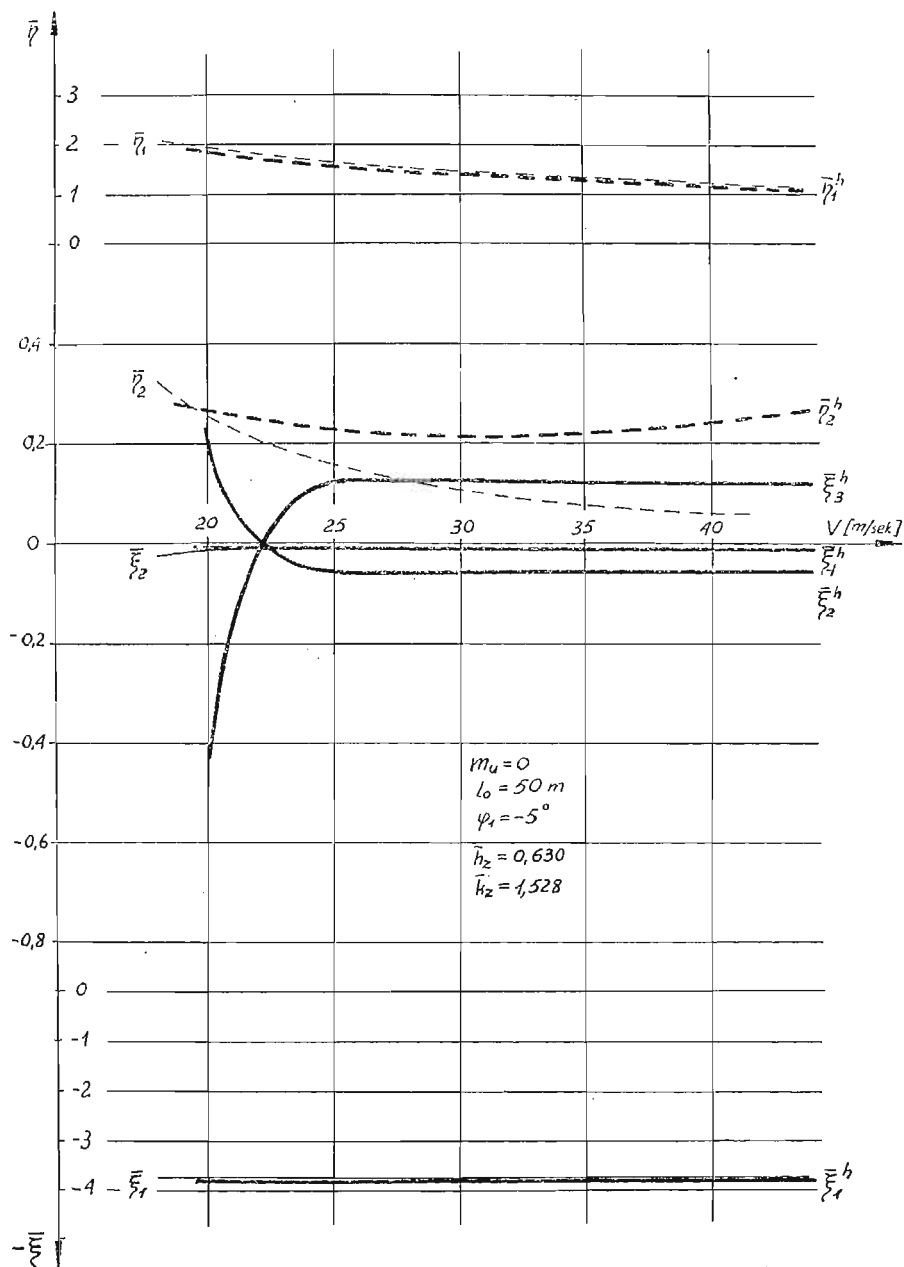
Rys. 11. Krzywe równowagi szybowca zmiany kąta holu φ_1 w funkcji współczynnika siły nośnej C_z dla różnych prędkości holu

Z (6.8) obliczono dla kilku prędkości holu zmianę kąta holu φ_1 w zależności od współczynnika siły nośnej szybowca C_z . Wykresy równowagi naniesiono na rys. 11.

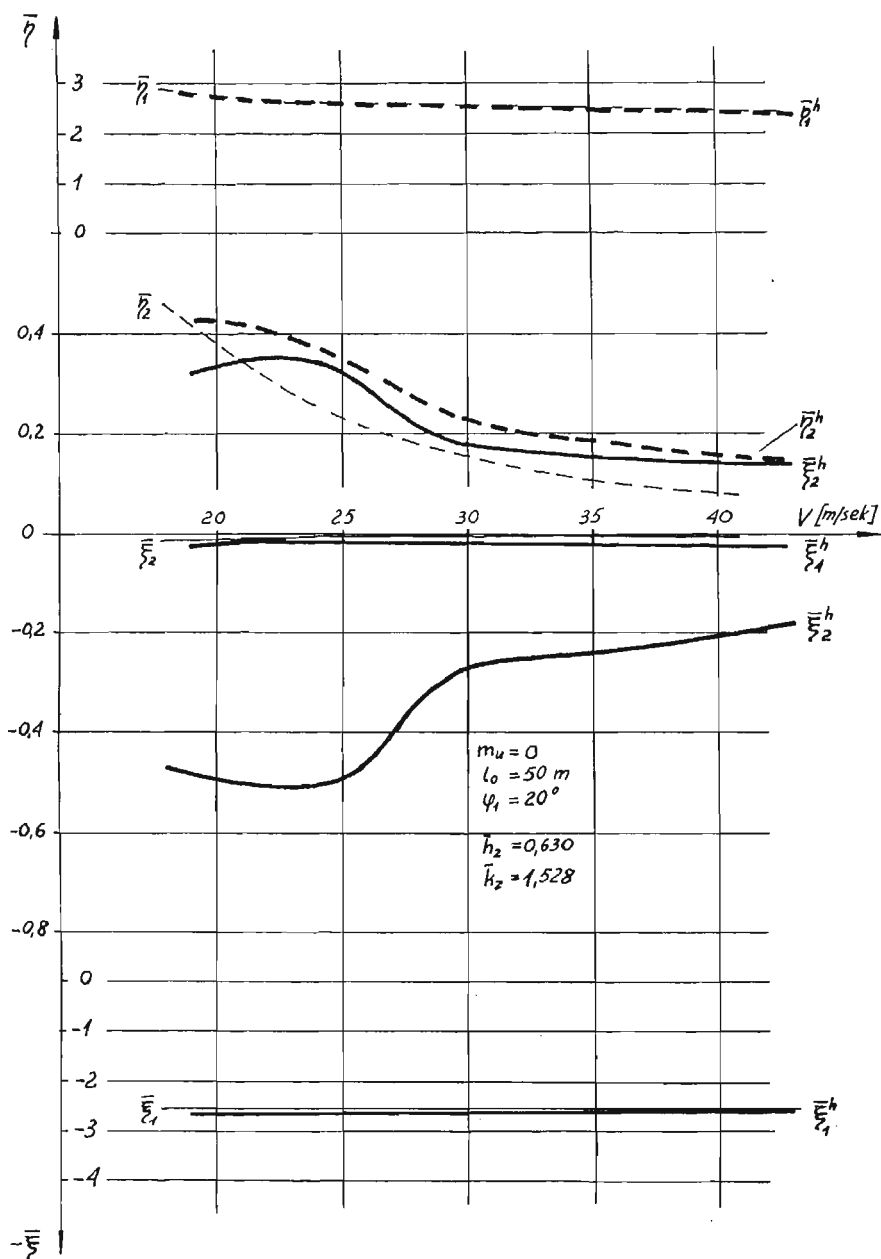
Widzimy z rys. 11, że hol szybowca z określoną prędkością i na określonej pozycji



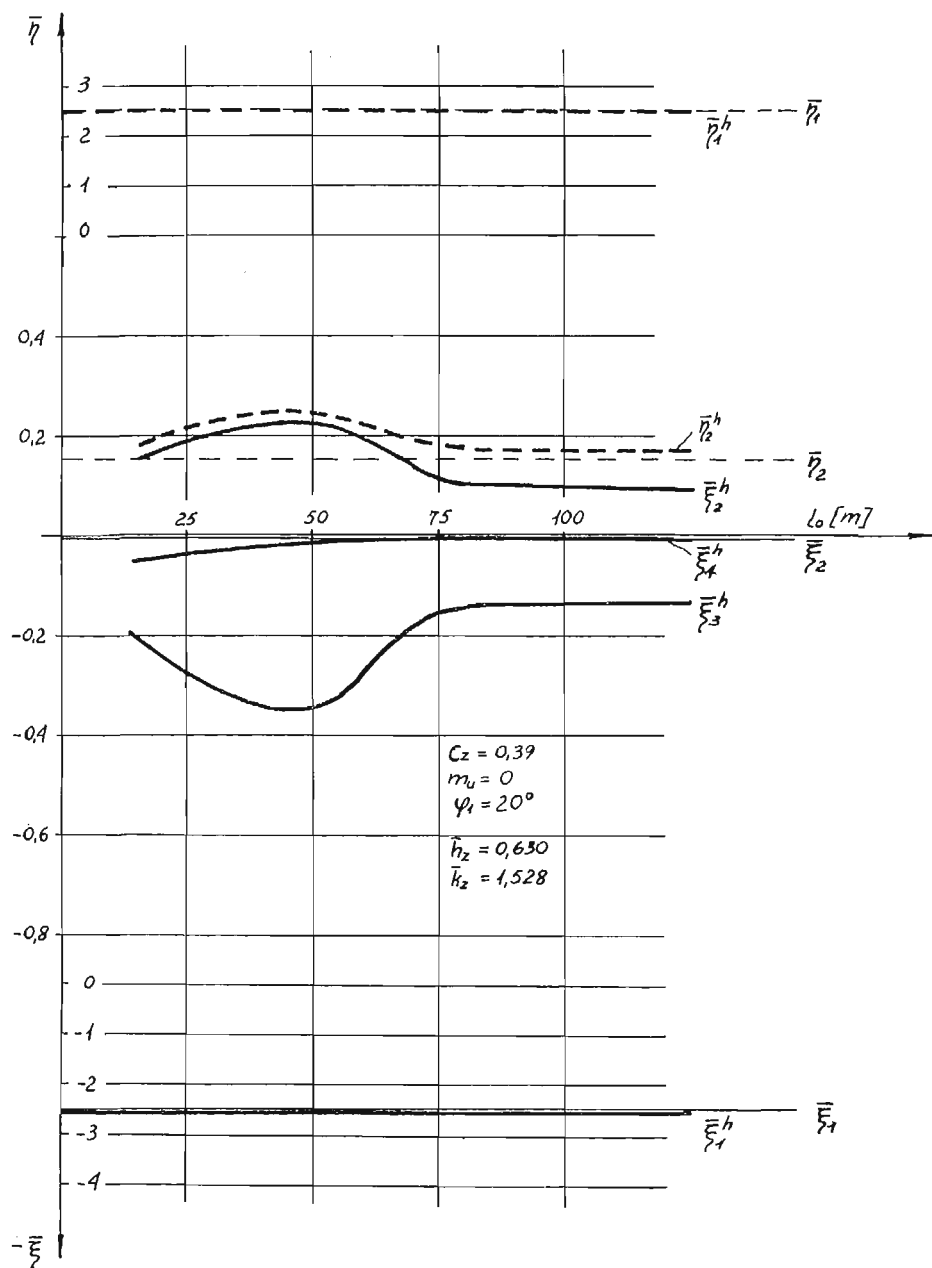
Rys. 12. Zmiana «zapasu stateczności statycznej» szybowca w funkcji prędkości holu dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$



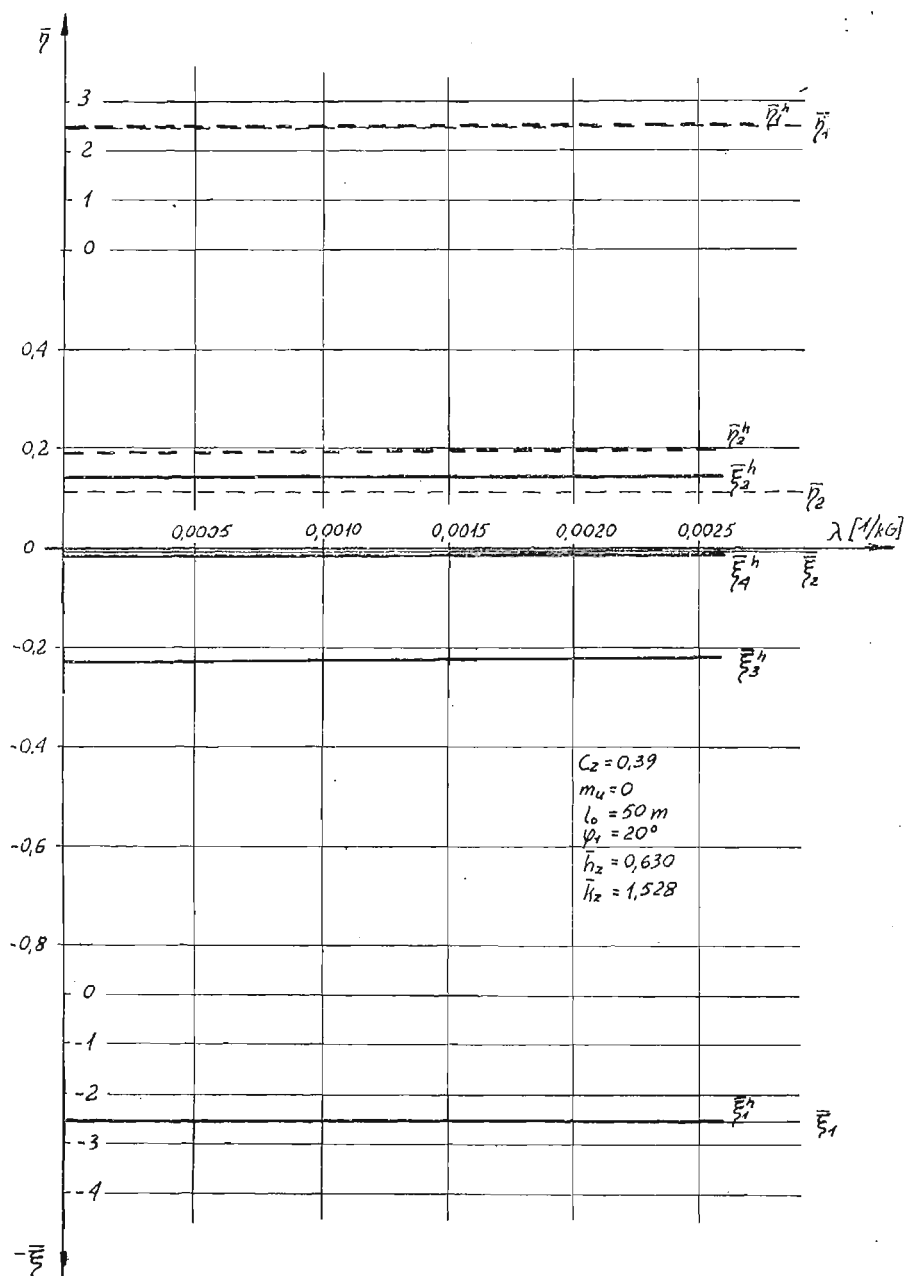
Rys. 13. Zmiana współczynników tłumienia i częstości sztywności w funkcji prędkości holu dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$



Rys. 14. Zmiana współczynników tłumienia i częstości sztywności w funkcji prędkości holu dla kąta holu $\varphi_1 = -5^\circ$



Rys. 15. Zmiana współczynników tłumienia i częstości szybowca w funkcji długości linii holowniczej dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$



Rys. 16. Zmiana współczynników tłumienia i częstości sztywca w funkcji współczynnika wydłużalności liny typu C dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$

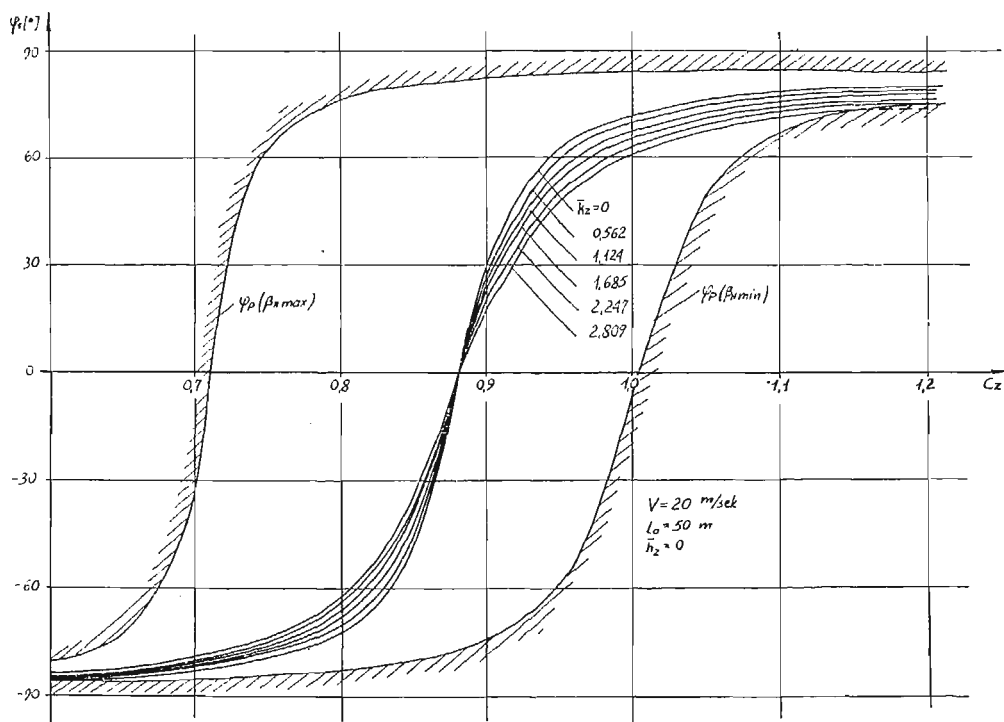
względem samolotu holującego (φ_1) może odbywać się tylko na jednej wartości C_z zapewniającej równowagę.

W locie holowanym osiągnięcie minimalnej prędkości V_{min} szybowca, odpowiadającej lotowi swobodnemu, jest możliwe jedynie w położeniu poniżej linii lotu samolotu holującego. W położeniach górnych *przepadnięcie* szybowca nastąpi na prędkości większej od prędkości minimalnej, $V_{minh} > V_{min}$.

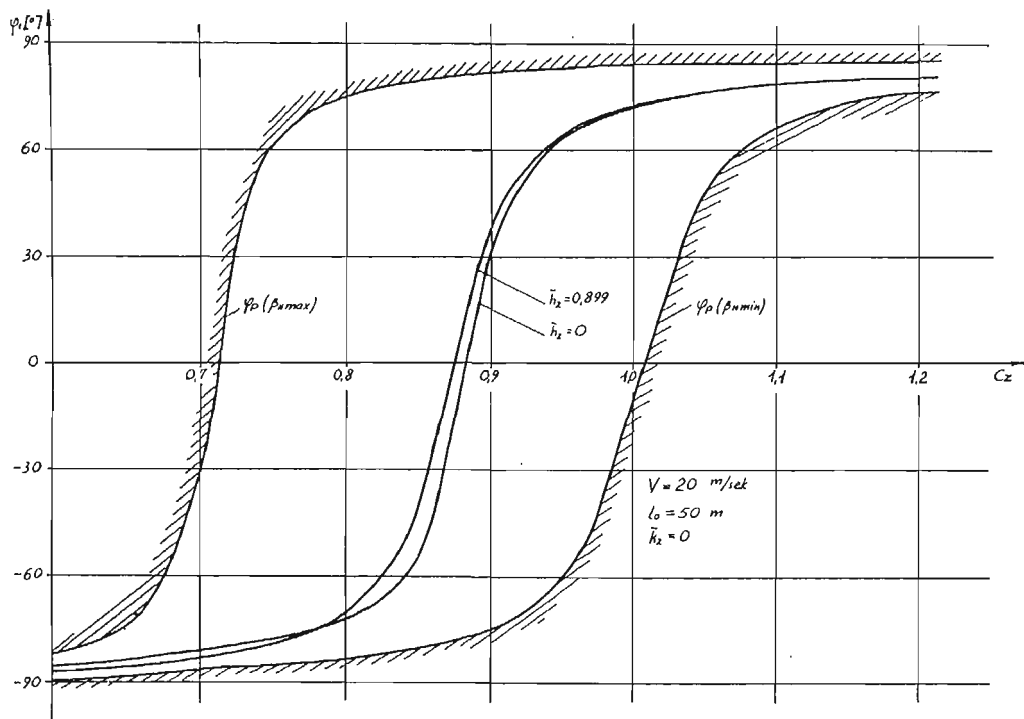
Zachowując stały kąt holu $\varphi_1 = 20^\circ$ obliczono dla różnych prędkości holu zmiany *zapasu stateczności statycznej* (rys. 12) i wartości własnych (rys. 13) oraz dla kąta holu $\varphi_1 = -5^\circ$ (rys. 14) wartości własne.

Widzimy, że zmiana prędkości holu nie wpływa na tłumienie oscylacji szybkich ($\bar{\xi}_1^h = \bar{\xi}_1$) i niewiele wpływa na zmianę częstości ($\bar{\eta}_1^h \approx \bar{\eta}_1$), nie daje różnic między lotem holowanym i swobodnym, nie wpływa również na aperiodyczne ruchy pionowe ($\bar{\xi}_4^h = \text{const}$) (rys. 13 i 14). Natomiast ze wzrostem prędkości następuje zwiększenie tłumienia wahań fugoidalnych $\bar{\xi}_2^h$ szczególnie dla położenia szybowca poniżej linii lotu samolotu holującego (rys. 13 i 14). Zmiana zapasu stateczności statycznej (rys. 12) ma taki sam charakter jak dla lotu swobodnego.

9.3. Wpływ długości i wydłużalności linii holowniczej na stateczność szybowca. Obliczenia przeprowadzono dla szybowca holowanego z prędkością $V = 30$ m/sec na kącie holu $\varphi_1 = 20^\circ$.



Rys. 17. Krzywe równowagi szybowca, zmiany kąta holu φ_1 w funkcji współczynnika siły nośnej C_z dla różnych poziomych położen zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca



Rys. 18. Krzywe równowagi szybowca dla różnych pionowych położenia zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca

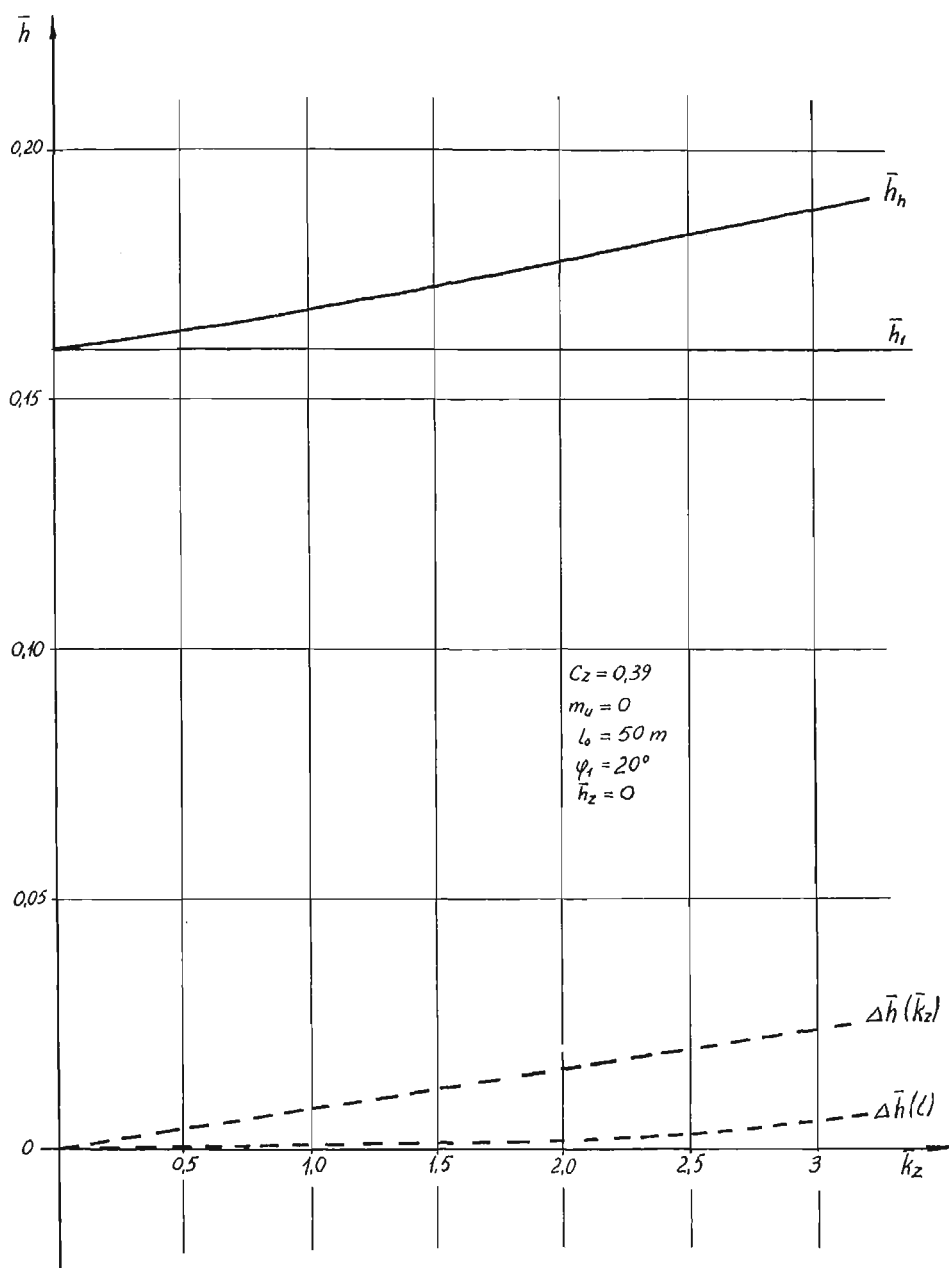
Lina holownicza jest typu *C* o zmiennej długości (rys. 15). Następnie przyjęto liny *C* o długości $l_0 = 50$ m i zmieniano dla niej współczynnik wydłużalności λ rys. 16.

Zmiana długości liny holowniczej i jej wydłużalności nie powoduje zmian *zapasu stateczności statycznej* w stosunku do lotu swobodnego (jeżeli lot odbywa się na stałym kącie holu $\varphi_1 = \text{const}$).

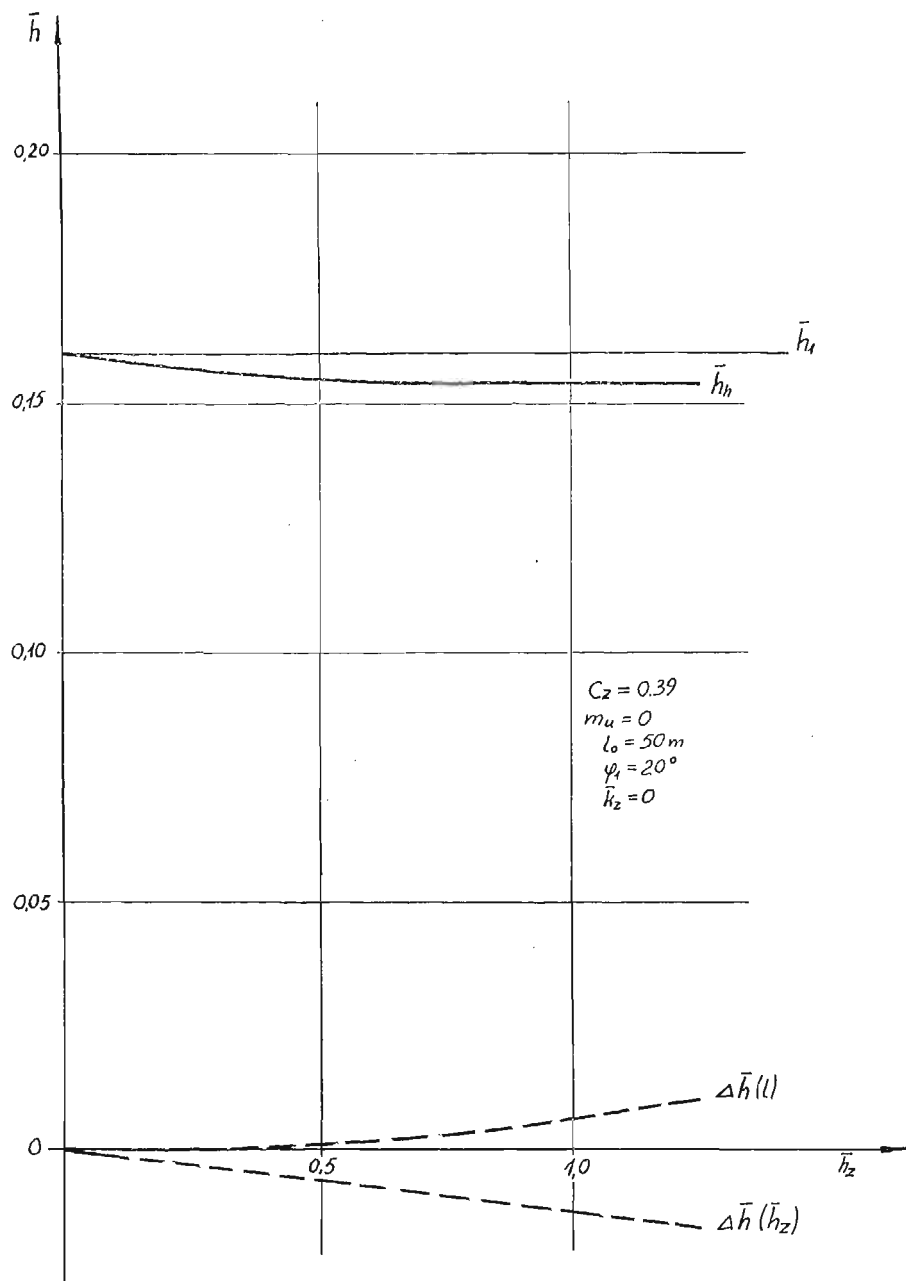
Zmiana długości liny wpływa jedynie na wahania fugoidalne ($\bar{\xi}_2^h, \bar{\eta}_2^h$) i aperiodyczne przemieszczenia podłużne ($\bar{\xi}_3^h$), nie ma natomiast wpływu na oscylacje szybkie (rys. 15). Wydłużalność liny nie wpływa na zmianę wartości własnych (rys. 16).

9.4. Wpływ położenia zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca na równowagę i stateczność. Rozpatrzono przypadek lotu holowanego z prędkością $V = 30$ m/s na linii typu *C* o długości $l_0 = 50$ m przy stałym kącie holu $\varphi_1 = 20^\circ$. Zmieniano położenie zaczepu holującego względem środka ciężkości przesuwając go od środka ciężkości poziomo do przodu $\bar{k}_z$ przy stałym $\bar{h}_z = 0$ i pionowo w dół $\bar{h}_z$ przy stałym $\bar{k}_z = 0$.

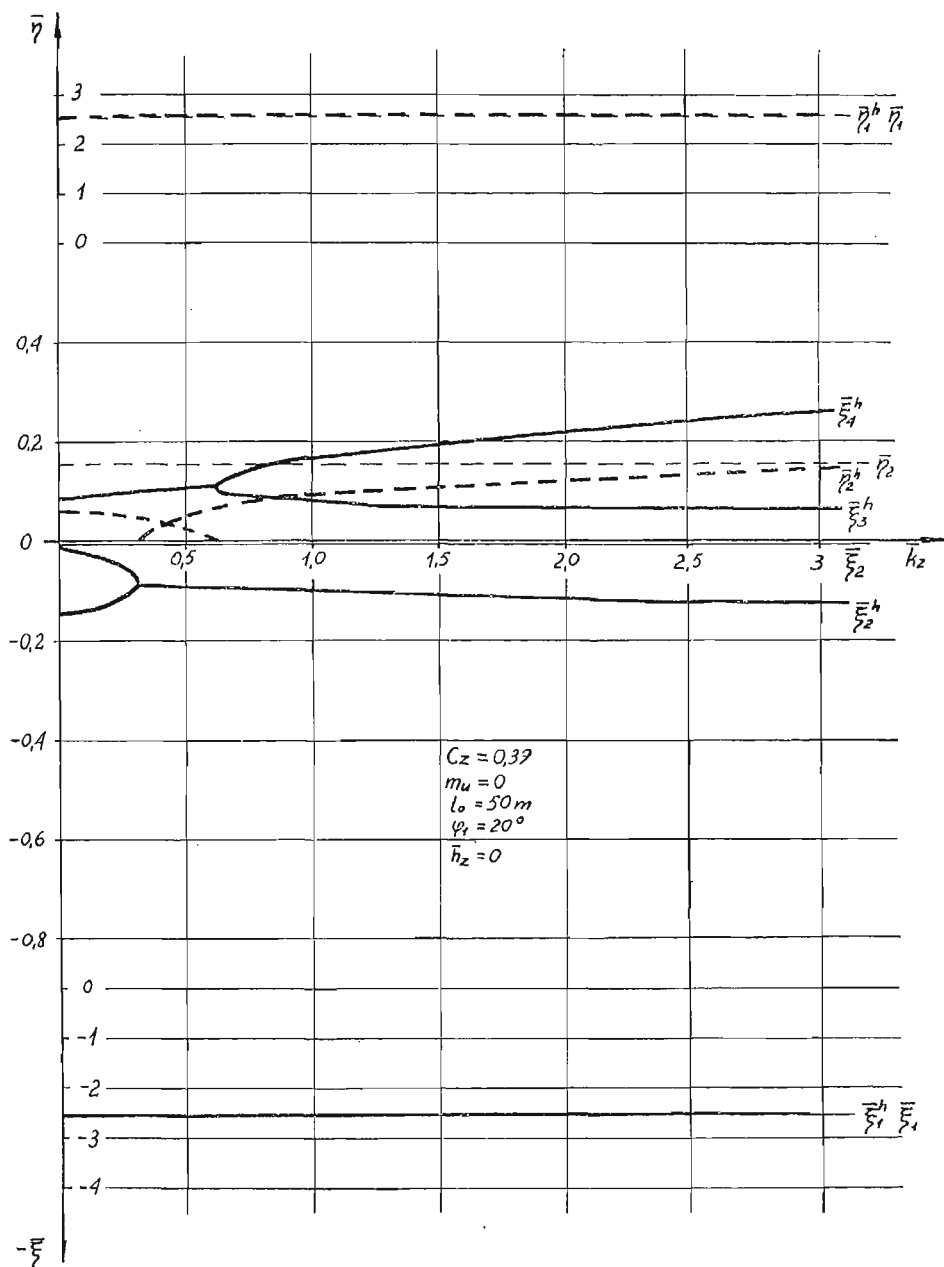
Na rysunku 17 przedstawiono krzywe równowagi obliczone wg (6.8) w zależności od poziomego przesunięcia zaczepu holowniczego. Wpływ przesunięcia pionowego zaczepu przedstawiono na rys. 18. Widzimy, że przesunięcie zaczepu holowniczego do przodu powoduje większe pochylenie krzywych równowagi, co w efekcie pozwala na większe ruchy sterem wysokości w celu uzyskania równowagi. Jest to czynnik ważny dla szybowców szkolnych. Przesunięcie zaczepu holowniczego w pionie niewiele wpływa na równowagę.



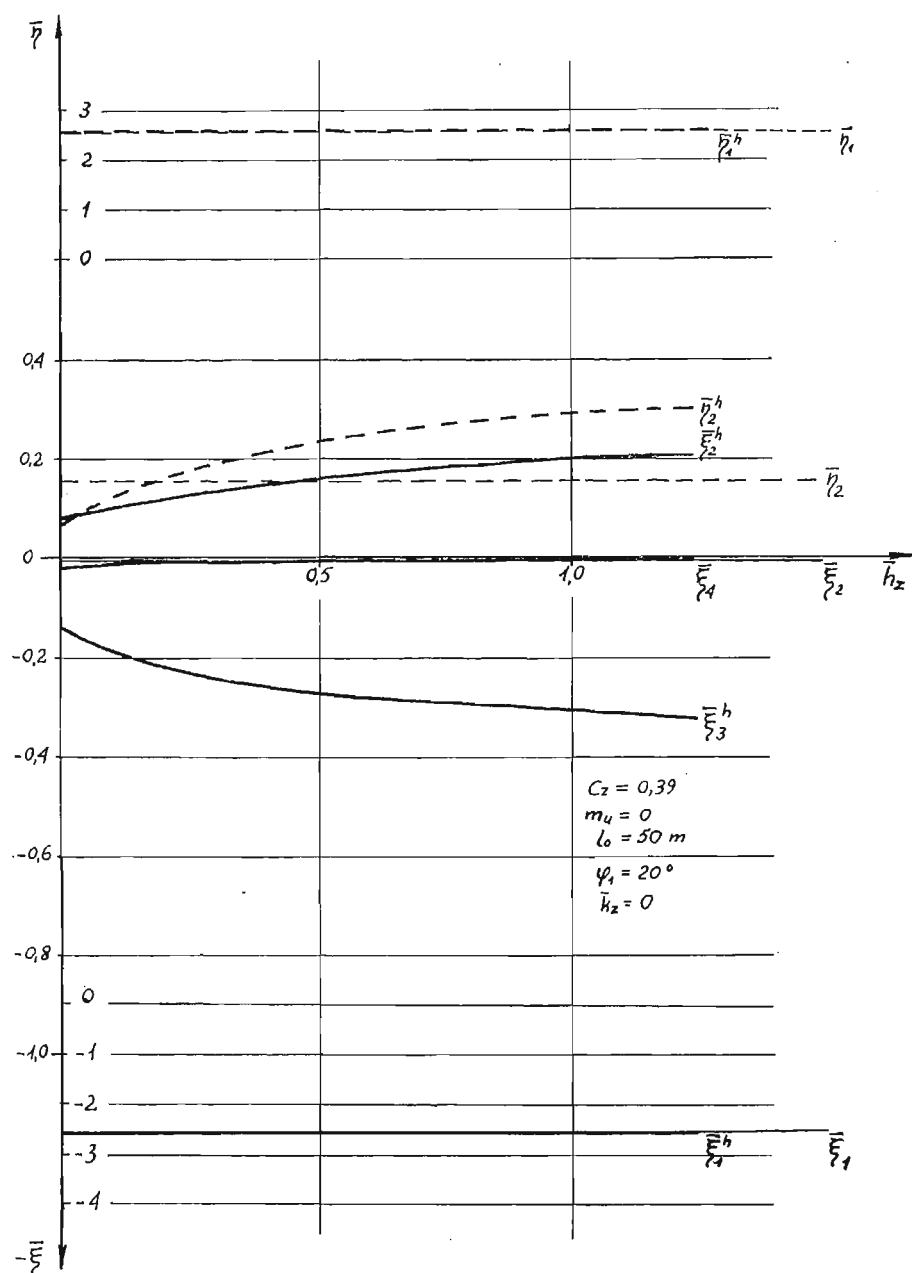
Rys. 19. Zmiana „zapasu stateczności statycznej” w funkcji położenia poziomego zaczepu holowniczego sztybowca dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$



Rys. 20. Zmiana «zapasu stateczności statycznej» w funkcji położenia pionowego zaczepu holowniczego szybowca dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$



Rys. 21. Zmiana współczynników tłumienia i częstości sztybowca w funkcji położenia poziomego zaczepu holowniczego sztybowca dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$



Rys. 22. Zmiana współczynników tłumienia i częstości szybowca w funkcji położenia pionowego zaczepu holowniczego szybowca dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$

Przesunięcie zaczepu holowniczego poziomo do przodu powoduje zawsze silny wzrost *zapasu stateczności statycznej* (rys. 19), natomiast przesunięcie zaczepu pionowo w dół zmniejsza zapas stateczności statycznej (rys. 20).

Zmiany położenia zaczepu holowniczego nie mają wpływu na oscylacje szybkie ($\bar{\xi}_1^h, \bar{\eta}_1^h$), natomiast silnie wpływają na wahania fugoidalne ($\bar{\xi}_2^h, \bar{\eta}_2^h$) i przesunięcia aperiodyczne ($\bar{\xi}_3^h$ i $\bar{\xi}_4^h$).

Przesunięcie zaczepu poziomo do przodu wpływa na tłumienie ($\bar{\xi}_2^h < 0$) wahań fugoidalnych i powoduje wzrost rozbieżności ruchów aperiodycznych ($\bar{\xi}_3^h > 0$ i $\bar{\xi}_4^h > 0$). Zmiana położenia zaczepu pionowo w dół od środka ciężkości wywołuje wzrost tłumienia ruchów aperiodycznych i rozbieżność wahań fugoidalnych.

Z powyższych wyników widzimy, że korzystniejsze jest położenie przednie zaczepu holowniczego ze względów na równowagę i stateczność szybowca w locie holowanym.

9.5. Wpływ zmiany zapasu stateczności statycznej na stateczność dynamiczną szybowca. Na zapas stateczności statycznej szybowca mają wpływ parametry konstrukcyjne, charakterystyka aerodynamiczna oraz warunki holu.

Na rysunkach 23 i 24 przedstawiono zmiany wartości własnych $\bar{\lambda}^h$ w przypadku holu z prędkością odpowiadającą współczynnikowi siły nośnej $C_z = 0,75$ dla dwóch położen szybowca: górnego rys. 23 i dolnego rys. 24.

Rysunki 25 i 26 przedstawiają zależność $\bar{\lambda}^h$ dla tych samych położen szybowca, lecz przy współczynniku siły nośnej $C_z = 0,22$, co odpowiada większej prędkości.

Z powyższych wykresów wynika, że zarówno tłumienie jak i częstotści oscylacji szybkich w locie holowanym i swobodnym są identyczne (rys. 23–26).

Wzrost zapasu stateczności statycznej wpływa ustateczniająco, gdyż następuje zmniejszenie dodatnich wartości $\bar{\xi}^h$.

Ważnym czynnikiem wpływającym na stateczność jest prędkość holu (lot na mniejszych C_z) oraz położenie szybowca względem samolotu holującego.

Porównując wyniki rys. 26 z wynikami rys. 23–25 widzimy, że najkorzystniejszymi warunkami lotu holowanego jest większa prędkość holu (w przypadku rozpatrywanego szybowca $V_h > 1,4 V_{min}$) oraz położenie szybowca poniżej linii lotu samolotu holującego.

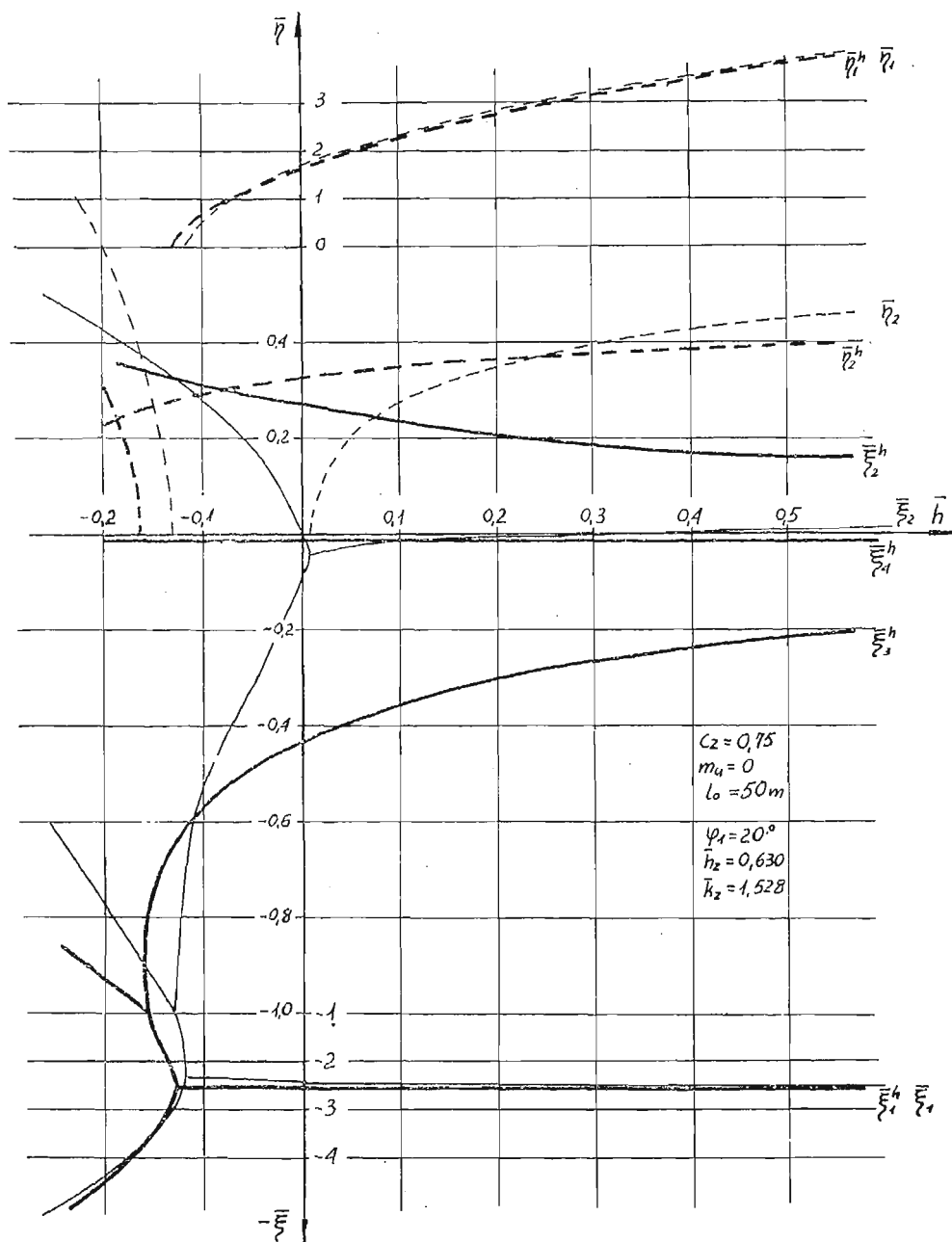
9.6. Wnioski. Na stateczność szybowca w locie holowanym mają wpływ parametry holu jak również rozwiązanie konstrukcyjne i aerodynamiczne szybowca. Z rozważań przeprowadzonych w poprzednich rozdziałach wypływają następujące wnioski.

a. *Konstrukcyjne.* Zaczep holowniczy szybowca powinien być umieszczony jak najdalej w przodzie przed środkiem ciężkości (o ile jest to możliwe nad środkiem ciężkości szybowca). Powoduje to wzrost zapasu stateczności statycznej, tłumienie wahań fugoidalnych oraz zapobiega gwałtownym zmianom pionowego położenia szybowca przy małych ruchach drążka sterowego.

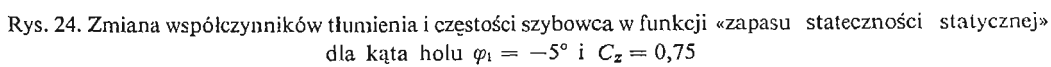
Zapas stateczności statycznej zapewniający właściwy pilotaż szybowca w locie swobodnym jest wystarczający dla lotu holowanego.

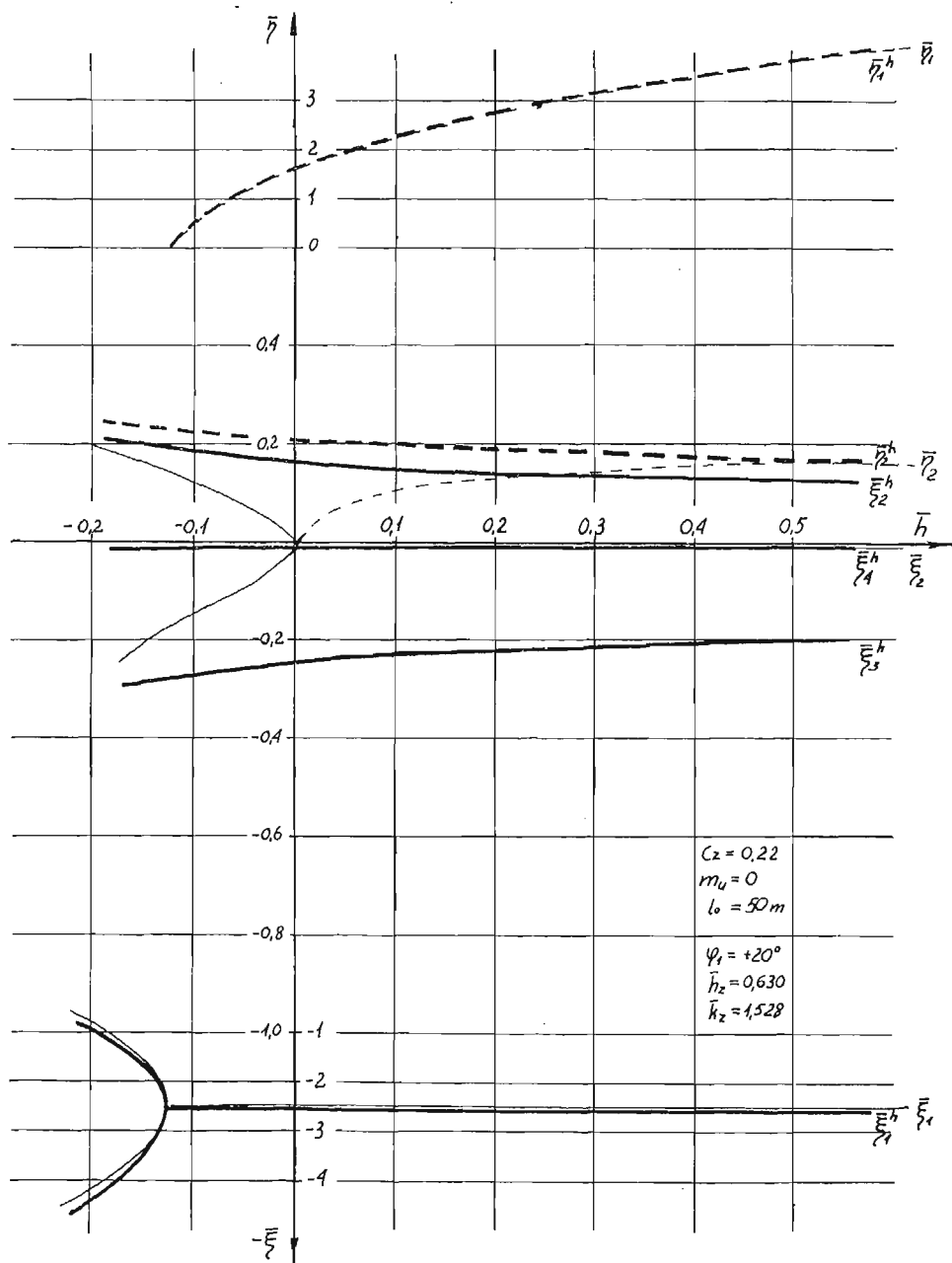
b. *Wnioski wynikające ze zmian parametrów holu.* Ze względu na możliwości wcześniejszego *przecignięcia* szybowca w locie holowanym powinna być określona minimalna prędkość holu dla danego szybowca, $V_{hmin} > V_{min}$.

Większe prędkości holu zapewniają zwiększenie stateczności szybowca.

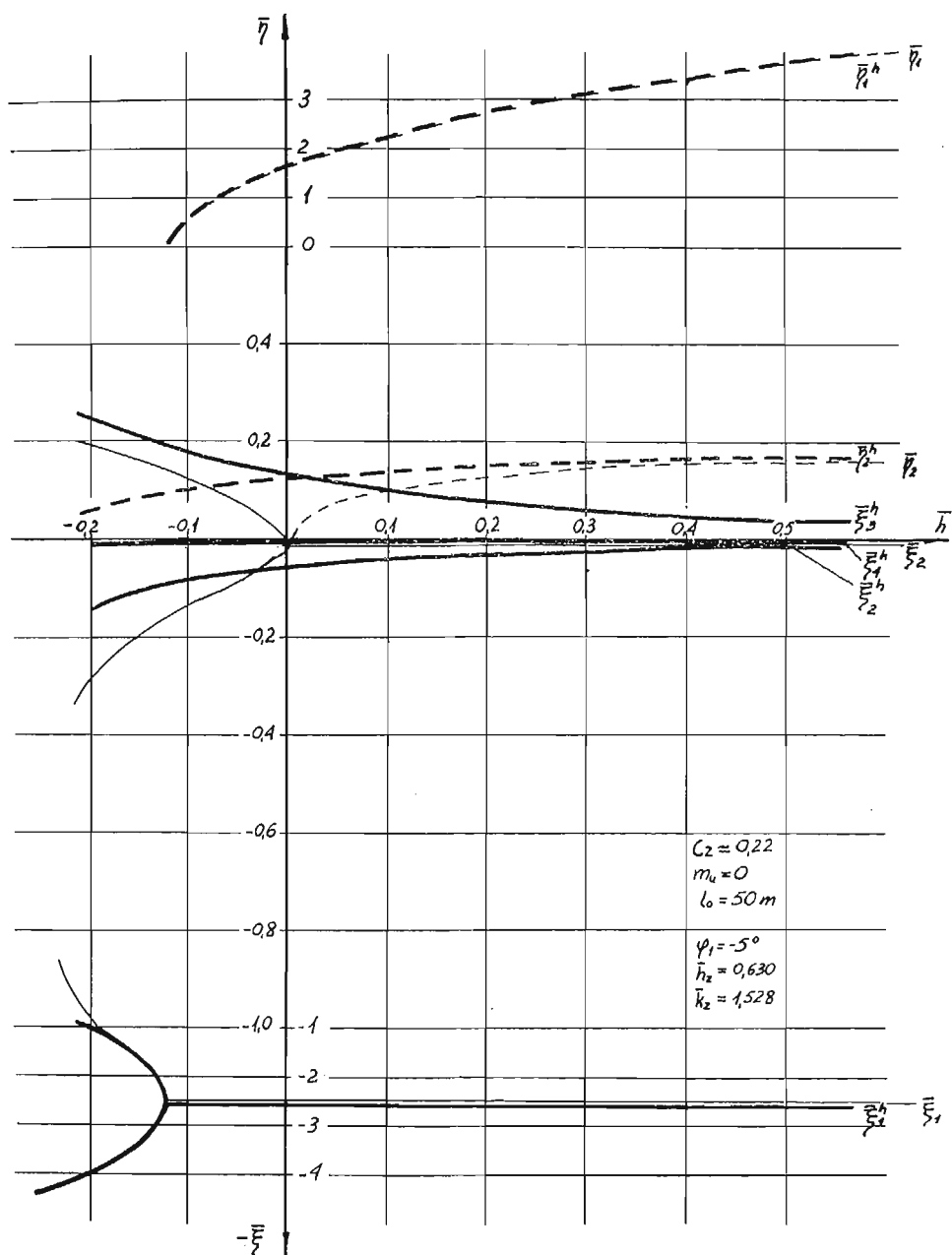


Rys. 23. Zmiana współczynników tłumienia i częstości sztywu w funkcji «zapasu stateczności statycznej» dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$ i $C_z = 0,75$





Rys. 25. Zmiana współczynników tłumienia i częstości szybowca w funkcji «zapasu stateczności statycznej» dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$ i $C_z = 0,22$



Rys. 26. Zmiana współczynników tłumienia i częstości szybowca w funkcji «zapasu stateczności statycznej» dla kąta holu $\varphi_1 = -5^\circ$ i $C_z = 0,22$

Korzystniejsze jest położenie szybowca poniżej linii lotu samolotu holującego, gdyż powoduje to tłumienie wahań fugoidalnych.

W locie holowanym może wystąpić niestateczność wahań fugoidalnych lub słaba rozbieżność ruchów aperiodycznych, zachodzi to jednak bardzo powoli i pilot zawsze zdąży zareagować sterami ustateczniająco.

Literatura cytowana w tekście

1. L. W. BRYANT, W. S. BROWN, N. E. SWEETING, *Collected Researches on the Stability of Kites and Towed Gliders*, Reports and Memoranda Nr 2303-1942.
2. J. BUKOWSKI, *Mechanika płynów*, PWN, Warszawa 1959.
3. B. ETKIN, *Dynamics of flight*, New York-London 1959.
4. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, Cz. I i II, PWN, Warszawa 1961.
5. J. HAJDUK, *Wybrane działy transportu linowego*, Warszawa 1961.
6. F. JANIK, *O obciążeniach w locie holowanym*, Sprawozdanie Instytutu Badań Technicznych Lotnictwa Nr 11, Warszawa 1933.
7. В. К. КАЧУРИН, *Гибкие нити с малыми стрелками*, Москва 1956.
8. В. К. КАЧУРИН, *Теория вислых систем*, Ленинград-Москва 1962.
9. S. NEUMARK, *Działanie wiatru na linę balonu na uwięzi*, Sprawozdanie Instytutu Badań Technicznych Lotnictwa Nr 1 (19), Warszawa 1936.
10. S. NEUMARK, *Equilibrium Configurations of Flying Cables of Captive Balloons, and Cable Derivatives for Stability Calculations*, Reports and Memoranda Nr 3333-1963.
11. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, *Аэродинамика самолета*, Москва 1957.
12. K. PETRIKAT, E. PIERUSCHKA, *Die Stabilitätsbeurteilungen des Fieseler-Deichselschlepps*, Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung.
13. K. D. WOOD *Technical aerodynamics*, Michigan 1955.
14. *Pomiary odkształcalności szybowcowych lin holowniczych*, Sprawozdanie Katedry Mechaniki Wydziału MEiL PW.
15. *Nowoczesne metody numeryczne*, Opracowane przez National Physical Laboratory Teddington, Middlesex, PWN, Warszawa 1965.

Резюме

УПРОЩЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОДОЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАНЕРА ВО ВРЕМЯ ПОЛЕТА НА БУКСИРНОМ ТРОСЕ

В работе рассматривается буксировка жесткого планера самолетом, находящимся в горизонтальном, прямолинейном установившемся полете. На основе работы С. Неймарка [9, 10] определена конфигурация буксирного троса под действием аэродинамических сил. Рассматриваются условия равновесия планера во время буксировки, а также определяются пределы буксира и соответствующих им коэффициентов подъемной силы. На основе результатов Брианта, Брауна и Суитинга, проведен анализ продольной устойчивости планера в буксирном полете с применением метода малых возмущений. Это позволило определить коэффициенты характеристического уравнения, применить критерий устойчивости Рауса-Гурвица и вычислить методом Берстова корни этого характеристического уравнения шестой степени.

Численный расчет выполнен для одного типа планера. Исследовано влияние на устойчивость планера следующих параметров: положения планера относительно самолета-буксировщика, скорости буксировки, положения места прикрепления буксирного замка относительно центра тяжести планера, а также длины и удлинения буксирного троса.

Результаты расчета показывают, что буксировка влияет на фугондные колебания, но не меняет короткопериодических колебаний. Устойчивость планера повышается, если он расположен ниже самолета-буксировщика, так как это вызывает затухание фугондных колебаний. Кроме того полезно поместить буксирный замок впереди, перед центром тяжести планера (и выше центра тяжести, если это возможно).

Summary

SIMPLIFIED LONGITUDINAL STABILITY OF A TOWED SAILPLANE

The paper deals with the case of a rigid sailplane towed by an aircraft in a horizontal, steady flight along a straight line. The tow rope configuration was defined according to the paper by S. Neumark, the aerodynamic forces being taken into account.

The equilibrium of the towed sailplane was considered. The tow angle intervals and the respective lift coefficients were calculated.

The longitudinal stability of a sailplane was analysed by means of the small perturbation method developed by Bryant, Brown and Sweeting. This method leads to a sixth order characteristic equation and allows for the application of the Ruth-Hurwitz stability criterion. The roots of characteristic equation were calculated by means of the Bairstow method.

Numerical analysis was accomplished for a specified high performance sailplane prototype. The influence on the stability of the following parameters was investigated: the relative sailplane-towing aircraft attitude, the flight velocity, the attachment lock position in relation to the sailplane gravity center, the length and elasticity of the tow rope.

As may be concluded from the obtained results the towing does not change the high frequency oscillation but modifies the fugal ones. With respect to the sailplane stability it is advantageous:

- to fly the sailplane below the level of the towing aircraft for the fugal oscillation damping,
- the attachment lock should be built in to the sailplane structure before the gravity center (preferably above its level).

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 marca 1966 r.
