

STATYKA POWIERZCHNIOWYCH OŚRODKÓW WŁÓKNISTYCH

WOJCIECH BARAŃSKI (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

W ostatnich latach można zaobserwować dość gwałtowny rozwój mechaniki ośrodków ciągłych, między innymi mechaniki tzw. ciała typu Cosserat. Ciałem typu Cosserat zwykło się nazywać ośrodek ciągły, w którym stan naprężenia opisuje się za pomocą niesymetrycznego tensora naprężenia, a nawet za pomocą tensorów naprężeń wyższych rzędów. Ten kierunek badań został zapoczątkowany pracami braci E. i F. COSSERAT [4]. Najbardziej reprezentatywnymi dla tego kierunku są prace TOUPINA [12], [13], GREENA i RIVLINA [9], [10], oraz ZAHORSKIEGO [17]. Szczegółowe omówienie prac z tego zakresu, które ukazały się do lipca 1966 r. zostało zamieszczone w pracy BARAŃSKIEGO, WILMAŃSKIEGO i WOŹNIAKA [2].

Teorie dwuwymiarowych ośrodków ciągłych typu Cosserat były rozpatrywane w pracach E. i F. COSSERAT [4], ERICKSENA i TRUESDELLA [5], GREENA, NAGHDIEGO i WAINRIGHTA [8] oraz COHENA i DESILVY [3]. Były to pewne uogólnienia teorii powłok obejmujące jako przypadek szczególny teorię Kirchhoffa–Love’a. W pracy [15], [16] WOŹNIAK znalazł po raz pierwszy inżynierskie zastosowanie teorii dwuwymiarowego ośrodka typu Cosserat, mianowicie wprowadził tzw. powierzchniowy ośrodek włóknisty jako ciągły model odpowiednio regularnego powierzchniowego dźwigara rusztowego. Powierzchniowy ośrodek włóknisty jest w zasadzie dwuwymiarowym ośrodkiem typu Cosserat wyposażonym dodatkowo w wewnętrzną strukturę — odpowiednik siatki utworzonej z osi dźwigara rusztowego — daną pewnym zbiorem rodzin krzywych.

Niniejsza praca jest w zasadzie streszczeniem rozprawy doktorskiej autora [1]. Zawiera teorię ośrodka włóknistego znajdującego się w stanie równowagi, zbudowaną w oparciu o podstawowe założenia mechaniki ośrodków ciągłych oraz o pewne dodatkowe postulaty wynikające z tego, że powierzchniowy ośrodek włóknisty ma być modelem powierzchniowego dźwigara rusztowego. Szczególnie dużo uwagi poświęcono wyjaśnieniu konsekwencji wprowadzenia wewnętrznej struktury oraz wyjaśnieniu podobieństwa powierzchniowego ośrodka włóknistego do powierzchniowego dźwigara rusztowego.

2. Podstawowe oznaczenia

- $\{x_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) przestrzenny układ współrzędnych kartezjańskich,
 S powierzchnia jaka tworzy powierzchniowy ośrodek w konfiguracji odniesienia,

$\{\eta^\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2$)	układ współrzędnych materialnych powierzchni S ,
$(.)$, α	pochodna cząstkowa według współrzędnej η^α ,
$(.) _\alpha$	pochodna kowariantna według współrzędnej η^α w układzie współrzędnych materialnych,
$\Delta = 1, 2, 3 \dots N$	martwe wskaźniki wyróżniające poszczególne rodziny krzywych,
$u(\eta^\alpha) = \text{const}$	równanie rodziny włókien Δ ,
$\tilde{t}_\alpha$	wektor jednostkowy normalny do włókna $u = \text{const}$,
t_α	wektor jednostkowy styczny do włókna $u = \text{const}$,
y_{ai} ($a = 1, 2, 3$)	ortogonalny tensor obrotu cząstki ośrodka,
e	gęstość energii wewnętrznej,
$P^\alpha_{;i}$	tensor naprężenia,
$M^\alpha_{;ij}, (\dot{M}^\alpha_{;i})$	tensor i pseudotensor naprężeń momentowych,
$\bar{P}_\Delta$	wektor napięcia w rodzinie włókien Δ ,
$\bar{M}_{\Delta ij}, (\dot{\bar{M}}_{\Delta i})$	tensor i pseudowektor napięcia momentowego w rodzinie włókien Δ ,
G_{aa}, K_{aab}	miary odkształcenia ośrodka włóknistego,
H_Δ, L_{ab}	miary odkształcenia rodziny włókien Δ ,
u_i	wektor przemieszczenia cząstki ośrodka włóknistego,
v_i	pseudowektor obrotu cząstki ośrodka włóknistego,
γ_{ai}, κ_{ai}	miary małego odkształcenia ośrodka,
$R_{\Delta ij}, Q_{\Delta ij}, S_{\Delta ij}$	macierze sztywności rodziny włókien Δ ,
U_i, V_i	przemieszczenia i obroty węzłów rusztu,
π_i, μ_i	siły i momenty przekrojowe w prętach rusztu,
$\mathcal{G}_i, \mathcal{K}_i$	miary globalnego odkształcenia prętów rusztu,
$\mathcal{R}_{ij}, \mathcal{Q}_{ij}, \mathcal{S}_{ij}$	macierze sztywności prętów rusztu.

3. Podstawowe definicje i pojęcia pierwotne

D.1. Powierzchniowym ośrodkiem włóknistym nazywać będziemy dwuwymiarową rozmaitość różniczkowalną S (GOETZ [6]) cząstek materialnych η z zadanymi na niej N rodzinami przebiegów u ($\Delta = 1, 2, \dots N$), posiadającą w każdej chwili t realizację w postaci powierzchni zwyczajnej s_t odpowiedniej klasy.

Wprowadźmy w rozmaitości S lokalne współrzędne $\{\eta^\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2$) i nazwijmy je współrzędnymi materialnymi. Powierzchnię s_t zadawać będziemy równaniami

$$(3.1) \quad x_i = x_i(\eta, t), \quad (i = 1, 2, 3),$$

gdzie $\{x_i\}$ jest układem współrzędnych kartezjańskich zwanym dalej układem współrzędnych przestrzennych.

D. 2. Konfiguracją aktualną powierzchniowego ośrodka włóknistego nazywać będziemy powierzchnię s_t wraz z określonymi na niej odpowiednio regularnymi polami trzech wektorów

$$(3.2) \quad y_{ai} = y_{ai}(\eta, t), \quad (a = 1, 2, 3)$$

tworzących w każdym punkcie i w każdej chwili ortonormalny układ odniesienia, tzn.

$$(3.3) \quad y_{ai}y_{bi} = \delta_{ab}, \quad y_{ai}y_{aj} = \delta_{ij}.$$

Wektory y_{ai} nazywać będziemy wektorami kierunkowymi.

D. 3. Ruchem powierzchniowego ośrodka włóknistego nazywać będziemy jednoparametrową rodzinę konfiguracji aktualnych; parametrem tej rodziny jest czas. Ruch ośrodka opisany jest równaniami (3.1) i (3.2).

D. 4. Konfiguracją odniesienia powierzchniowego ośrodka włóknistego nazywać będziemy jedną z konfiguracji aktualnych.

Powierzchnię s_t w konfiguracji odniesienia zadamy równaniami

$$(3.4) \quad x_i = X_i(\eta)$$

i będziemy ją oznaczać literą S , natomiast wartości wektorów kierunkowych w konfiguracji odniesienia oznaczmy $Y_{ai}(\eta)$. Współrzędne materialne $\{\eta^a\}$ w konfiguracji odniesienia traktować będziemy jako układ współrzędnych Gaussa powierzchni S i nazywać będziemy układem współrzędnych materialnych.

Z przedstawionej definicji ruchu ośrodka (D.3) wynika, że każda cząstka materialna η posiada sześć stopni swobody. Trzy z nich odpowiadają przemieszczeniu cząstki, natomiast pozostałe trzy odpowiadają obrotom cząstki. Ciała dwuwymiarowe, których konfigurację opisuje się za pomocą wektorów kierunkowych są nazywane powierzchniami zorientowanymi. Po raz pierwszy teorię powierzchni zorientowanej rozpatrywali bracia E. i F. COSSERAT [4], a ostatnio ERICKSEN i TRUESDELL [5], TRUESDELL i TOUPIN [14], GREEN, NAGHDI i WAINRIGHT [8] oraz COHEN i DESILVA [3]. Powierzchniowy ośrodek włóknisty jest przypadkiem szczególnym powierzchni zorientowanej. Jedyna różnica polega na tym, że ośrodek włóknisty jest wyposażony w N rodzin przebiegów, opisujących tzw. wewnętrzną strukturę ośrodka.

D. 5. O dwóch ruchach

$$(3.5) \quad x_i = x_i(\eta, t), \quad y_{ai} = y_{ai}(\eta, t)$$

oraz

$$(3.6) \quad x_i = x_i^*(\eta, t^*), \quad y_{ai} = y_{ai}^*(\eta, t^*)$$

będziemy mówili, że różnią się o ruch sztywny, gdy spełniają związki

$$(3.7) \quad \begin{aligned} x_i^*(\eta, t^*) &= Q_{ij}(t)x_j(\eta, t) + a_i(t), \\ y_{ai}^*(\eta, t^*) &= Q_{ij}(t)y_{aj}(\eta, t), \\ t^* &= t + b, \end{aligned}$$

gdzie Q_{ij} jest tensorem ortogonalnym właściwym, tzn.

$$(3.8) \quad Q_{ij}Q_{kj} = \delta_{ik}, \quad \det Q_{ij} = 1,$$

a_i jest wektorem, natomiast b jest skalarzem.

Dotychczasowe rozważania dotyczyły wyłącznie geometrycznych aspektów teorii ośrodka włóknistego. W dalszym ciągu do opisu właściwości mechanicznych ośrodka będziemy używali następujących pojęć pierwotnych¹⁾:

- P.1 gęstości energii wewnętrznej e ,
- P.2 gęstości sił przekrojowych p_i ,
- P.3 gęstości momentów przekrojowych m_{ij} ,
- P.4 gęstości sił zewnętrznych f_i ,
- P.5 gęstość momentów zewnętrznych h_{ij} .

O wymienionych powyżej wielkościach mechanicznych będziemy zakładali, że są odpowiednio regularnymi polami. Będziemy mówili, że pola sił i momentów przekrojowych określają stan naprężenia ośrodka.

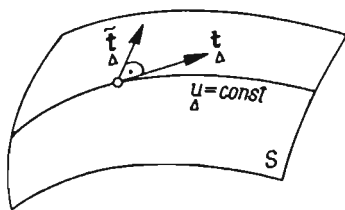
W dalszych rozważaniach używać będziemy wyłącznie opisu materiałowego, tzn. przyjmujemy, że wszystkie gęstości odniesione są do jednostki powierzchni lub jednostki długości w konfiguracji odniesienia, a wszystkie pola zależą wyłącznie od współrzędnych materialnych $\{\eta^a\}$. Przyjmujemy również, że wszystkie składowe oznaczone małymi literami alfabetu greckiego są odniesione do bazy naturalnej układu współrzędnych materialnych.

4. Wewnętrzna struktura powierzchniowego ośrodka włóknistego

Z definicji ośrodka (D.1) wynika, że N zadanych rodzin przebiegów u_Δ posiada w każdej chwili t realizację w postaci N rodzin krzywych, które nazwiemy włóknami. Siatkę utworzoną z N rodzin krzywych oznaczmy literą $\mathfrak{M}_N$. Przyjmujemy, że przez każdą cząstkę η przechodzi dokładnie po jednej krzywej z każdej rodziny. Równanie rodziny krzywych Δ napiszemy w postaci uwikłanej:

$$(4.1) \quad u(\eta^\alpha) = \text{const.}$$

W płaszczyźnie stycznej w danym punkcie do powierzchni S wyróżnimy dwa wektory jednostkowe $\underline{t}_\Delta$ i $\underline{\tilde{t}}_\Delta$, przy czym niech pierwszy z nich będzie styczny, a drugi normalny do krzywej $u_\Delta = \text{const}$ (rys. 1). Wektory te spełniają związki



Rys. 1

$$(4.2) \quad \underline{\tilde{t}}_\alpha = \pm u_{,\alpha} (a^{\mu\nu} u_{,\mu} u_{,\nu})^{-1/2}, \quad \underline{t}_\alpha = \pm \epsilon_{\alpha\beta}^{\mu\nu} (a^{\mu\nu} u_{,\mu} u_{,\nu})^{-1/2}$$

oraz

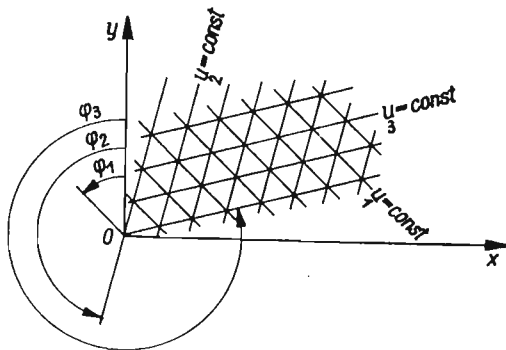
$$(4.3) \quad \underline{t}_\alpha \underline{t}^\alpha = 1, \quad \underline{t}_\alpha \underline{\tilde{t}}^\alpha = 0, \quad \underline{\tilde{t}}_\alpha \underline{\tilde{t}}^\alpha = 1.$$

¹⁾ W dalszych rozważaniach nie będziemy używać żadnych pojęć dynamicznych, takich jak pęd, kręt czy energia kinetyczna.

O siatce $\mathfrak{M}_3$ złożonej z trzech rodzin krzywych będziemy mówili, że jest siatką sześciokątną, gdy w każdym płacie prostym będącym częścią powierzchni S daje się odwzorować topologicznie na siatkę

$$(4.4) \quad u_{\Delta}(x, y) = \operatorname{Re}[(x+iy)\exp(-\varphi)], \quad \left(\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi}{3}\Delta\right), \quad (\Delta = 1, 2, 3)$$

złożoną z trzech rodzin prostych równoległych (rys. 2).



Rys. 2

5. Podstawowe założenia teorii powierzchniowego ośrodka włóknistego

Z.1. W danym punkcie gęstości sił i momentów przekrojowych zależą wyłącznie od orientacji przekroju, przy pomocy którego zostały uwewnętrzznione, tzn. w danym punkcie zachodzi

$$(5.1) \quad p_i = p_i(\mathbf{n}), \quad m_{ij} = m_{ij}(\mathbf{n}),$$

gdzie $\mathbf{n}$ jest jednostkowym wektorem leżącym w płaszczyźnie stycznej w tym punkcie do powierzchni S i zewnętrznym normalnym w tym punkcie do linii przekrojowej.

Z.2. Wszystkie wprowadzone dotychczas wielkości mechaniczne (P.1–P.5) są addytywne względem poszczególnych rodzin włókien, tzn. można jednoznacznie wyróżnić tą część danej wielkości mechanicznej, która przypada na daną rodzinę włókien.

Dla energii wewnętrznej będzie zatem zachodził rozkład

$$(5.2) \quad e = \sum_{\Delta=1}^N e_{\Delta},$$

gdzie e_{Δ} jest gęstością energii wewnętrznej rodziny włókien u_{Δ} . Związki analogiczne do (5.2) zachodzą dla pozostałych wielkości mechanicznych.

Z.3. Bezpośrednie oddziaływania mechaniczne sąsiednich włókien danej rodziny są równe zero, tzn.

$$(5.3) \quad p_i(\tilde{\mathbf{t}}) = 0, \quad m_{ij}(\tilde{\mathbf{t}}) = 0.$$

Dalsze założenia dotyczyć będą wyłącznie sprężystego ośrodka włóknistego znajdującego się w stanie równowagi.

Z.4. W każdym stanie równowagi sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego energia wewnętrzna spełnia równanie

$$(5.4) \quad e = e(x_{i,\alpha}; y_{ai}; y_{ai,\alpha}; \eta),$$

gdzie e jest tzw. potencjałem sprężystości rodziny.

Z.5. Potencjał sprężystości jest wielkością materialnie obiektywną, tzn. jest niezmiennikiem grupy przekształceń

$$(5.5) \quad x_i \rightarrow Q_{ij}x_j + a_i, \quad y_{ai} \rightarrow Q_{ij}y_{aj},$$

gdzie Q_{ij} oraz a_i spełniają założenie wymienione w definicji ruchu sztywnego (D.5).

Z.6. W stanie równowagi sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego spełniona jest zasada prac przygotowanych przyjęta w następującej postaci:

$$(5.6) \quad \delta \int_{\sigma} e dS = \int_{\sigma} (f_i \delta x_i + h_{ij} y_{ai} \delta y_{aj}) dS + \int_{\partial \sigma} (p_i \delta x_i + m_{ij} y_{ai} \delta y_{aj}) dl,$$

gdzie σ jest dowolną częścią powierzchni S , natomiast $\partial \sigma$ jest brzegiem tej części.

6. Podstawowe równania statyki sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego

T.1. Równania Eulera dla problemu wariacyjnego (5.6) mają postać

$$(6.1) \quad \frac{\partial e}{\partial x_{i,\alpha}}|_{\alpha} + f_i = 0,$$

$$\left(y_{a[ij} \frac{\partial e}{\partial y_{|a[i],\alpha}} \right)|_{\alpha} + \frac{\partial e}{\partial x_{j,\alpha}} x_{j,\alpha} + h_{ij} + K_{[ij]} = 0 \quad \text{dla } \eta \in \sigma$$

oraz

$$(6.2) \quad p_i(\mathbf{n}) = n_{\alpha} \frac{\partial e}{\partial x_{i,\alpha}}, \quad m_{ij}(\mathbf{n}) = n_{\alpha} y_{a[ij} \frac{\partial e}{\partial y_{|a[i],\alpha}}, \quad \text{dla } \eta \in \partial \sigma,$$

gdzie oznaczono

$$(6.3) \quad K_{ij} \equiv \frac{\partial e}{\partial x_{i,\alpha}} x_{j,\alpha} + \frac{\partial e}{\partial y_{ai}} y_{aj} + \frac{\partial e}{\partial y_{ai,\alpha}} y_{aj,\alpha}.$$

Dowód powyższego twierdzenia przeprowadza się, korzystając ze znanych reguł rachunku wariacyjnego.

Równania (6.1) i (6.2) są podstawowymi równaniami statyki sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego. Równania (6.1) nazwiemy równaniami równowagi, natomiast równania (6.2) nazwiemy warunkami brzegowymi.

D.6. Obiektem naprężeń P_i^{α} i obiektem naprężeń momentowych M_{ij}^{α} nazywać będziemy wielkości sił i momentów przekrojowych uzewnętrzniczonych przekrojami poprowadzonymi wzdłuż linii parametrycznych układu współrzędnych materialnych, tzn.

$$(6.4) \quad P_i^{\alpha} \equiv \sqrt{a^{\alpha\alpha}} p_i(a^{\alpha}(a^{\alpha\alpha})^{-1/2}),$$

$$M_{ij}^{\alpha} \equiv \sqrt{a^{\alpha\alpha}} m_{ij}(a^{\alpha}(a^{\alpha\alpha})^{-1/2}),$$

α — nie sumowane

gdzie $a^{\alpha\beta}$ jest tensorem metrycznym powierzchni S , natomiast a^α jest bazą wzajemną układu współrzędnych materialnych.

Korzystając z założenia o addytywności wielkości mechanicznych (2.1) można wprowadzić pojęcia obiektu naprężeń P_{Δ}^α i obiektu naprężeń momentowych M_{Δ}^α w rodzinie włókien Δ . Wzory definiujące te pojęcia będą podobne do wzorów (6.4).

T.2. Obiekty naprężeń i naprężeń momentowych w rodzinie włókien są odpowiednimi pochodnymi potencjału sprężystości

$$(6.5) \quad P_{\Delta}^\alpha = \frac{\partial \epsilon_{\Delta}}{\partial x_{i,\alpha}}, \quad M_{\Delta}^\alpha = \frac{\partial \epsilon_{\Delta}}{\partial y_{a[i,|\alpha|]} } y_{|a|j]},$$

a zatem są tensorami.

Aby wykazać powyższe stwierdzenie wystarczy do wzorów (6.4) podstawić warunki brzegowe (6.2), a następnie sprawdzić, że prawe strony związków (6.5) są rzeczywiście tensorami.

Podstawiając (6.5) do (6.1) i (6.2) otrzymujemy

$$(6.6) \quad P_{\Delta}^\alpha|_{\alpha} + f_i = 0, \quad M_{\Delta}^\alpha|_{ij}|_{\alpha} + P_{\Delta}^\alpha|_{[i} x_{j],\alpha} + h_{ij} + K_{[ij]} = 0.$$

oraz

$$(6.7) \quad p_i(\mathbf{n}) = n_{\alpha} P_{\Delta}^\alpha, \quad m_{ij}(\mathbf{n}) = n_{\alpha} M_{\Delta}^\alpha|_{ij}.$$

Równania (6.5)–(6.7) są inną postacią podstawowego układu równań (6.1) i (6.2).

7. Konsekwencje istnienia wewnętrznej struktury ośrodka

T.3. Z założenia o nieoddziaływaniu sąsiednich włókien (Z.2) wynika, że potencjał sprężystości ϵ_{Δ} daje się przedstawić w postaci

$$(7.1) \quad \epsilon_{\Delta} = \epsilon'_{\Delta}(\partial x_i; y_{ai}; \partial_{\Delta} y_{ai}; \tilde{\partial}_{\Delta} y_{ai}; \eta), \quad \frac{\partial \epsilon'_{\Delta}}{\partial (\tilde{\partial}_{\Delta} y_{a[i})} y_{|a|j]} = 0,$$

gdzie ∂_{Δ} oznacza operator różniczkowy pochodnej absolutnej w kierunku $\mathbf{t}_{\Delta}$

$$(7.2) \quad \partial(\cdot) \equiv t_{\Delta}^{\alpha}(\cdot)|_{\alpha}.$$

D o w ó d. Zauważmy, że oznaczając

$$(7.3) \quad \tilde{\partial}(\cdot) \equiv \tilde{t}^{\alpha}(\cdot)|_{\alpha}$$

mamy tożsamość

$$(7.4) \quad (\cdot)|_{\alpha} = t_{\alpha}^{\Delta} \partial(\cdot) + \tilde{t}_{\alpha}^{\Delta} \tilde{\partial}(\cdot).$$

Korzystając z niej możemy — bez umniejszania ogólności rozważań — przedstawić potencjał sprężystości w następującej postaci

$$(7.5) \quad \epsilon_{\Delta} = \epsilon'_{\Delta}(\partial x_i; \tilde{\partial} x_i; y_{ai}; \partial y_{ai}; \tilde{\partial} y_{ai}; \eta).$$

Następnie podstawiając do równań (5.3) kolejno związki (6.2) i (7.5) otrzymujemy

$$(7.6) \quad \frac{\partial \epsilon'}{\partial (\tilde{\partial} x_i)} = 0, \quad \frac{\partial \epsilon'}{\partial (\tilde{\partial} y_{a[i])}} y_{a|j]} = 0,$$

co kończy dowód.

Ze związków (7.1) i (6.5) łatwo wynika

$$(7.7) \quad P_{\Delta}^{\alpha} = t_{\Delta}^{\alpha} \bar{P}_i, \quad M_{\Delta}^{\alpha} = t_{\Delta}^{\alpha} \bar{M}_{ij},$$

gdzie oznaczono

$$(7.8) \quad \bar{P}_i \equiv \frac{\partial \epsilon'}{\partial (\partial x_i)}, \quad \bar{M}_{ij} \equiv y_{a[i} \frac{\partial \epsilon'}{\partial (\partial y_{a|j])}}.$$

T.4. Wielkości $\bar{P}_i$ i $\bar{M}_{ij}$ są gęstościami sił i momentów przekrojowych w rodzinie włókien Δ uwewnętrzzonymi przekrojem normalnym w danym punkcie do włókna u , tzn.

$$(7.9) \quad \bar{P}_i = p_i(\mathbf{t}), \quad \bar{M}_{ij} = m_{ij}(\mathbf{t}).$$

Aby wykazać powyższe stwierdzenie należy do warunków brzegowych (6.7) podstawić związki (7.7), a następnie położyć $\mathbf{n} = \mathbf{t}$.

Korzystając ze związków (7.7) i (4.2) można równania równowagi (6.6) przekształcić do postaci

$$(7.10) \quad \partial_{\Delta} (\bar{\lambda} P_i) + \bar{\lambda} f_i = 0, \quad \partial_{\Delta} (\bar{\lambda} M_{ij}) + \bar{\lambda} (P_{ti} \partial_{\Delta} x_{j|} + h_{ij} + K_{t[ij]}) = 0,$$

gdzie

$$(7.11) \quad \bar{\lambda} \equiv (a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} u_{,\beta})^{-1/2}.$$

Interpretację geometryczną wielkości $\bar{\lambda}$ otrzymamy rozpatrując różniczkę zupełną funkcji $u(\eta^{\alpha})$,

$$(7.12) \quad du = u_{,\alpha} d\eta^{\alpha}.$$

Jeżeli przyjmiemy, że wektor $d\eta^{\alpha}$ jest prostopadły do krzywej u , a zatem kolinearny z wektorem $u_{,\alpha}$, wówczas iloczyn skalarny wektorów $d\eta^{\alpha}$ i $u_{,\alpha}$ równa się iloczynowi ich długości

$$(7.13) \quad du = \pm |u_{,\alpha}| |d\eta^{\alpha}|.$$

Ale

$$(7.14) \quad |u_{,\alpha}| = (a^{\mu\nu} u_{,\mu} u_{,\nu})^{1/2} = \bar{\lambda}^{-1},$$

przeto

$$(7.15) \quad |d\eta^{\alpha}| = \pm \bar{\lambda} du.$$

Wielkość $\bar{\lambda}$ jest zatem miarą odległości między krzywymi $u = \text{const}$ i $u + du = \text{const}$. Interpretacja geometryczna wielkości $\bar{\lambda}$ upoważnia nas do nazwania równań (7.10) równaniami równowagi włókna Δ .

8. Materialna obiektywność

Założenie Z.5 żąda, aby potencjał sprężystości spełniał równanie funkcyjne

$$(8.1) \quad \epsilon(x_{i,\alpha}; y_{ai}; y_{ai,\alpha}; \eta) = \epsilon(Q_{ij}x_{j,\alpha}; Q_{ij}y_{aj}; Q_{ij}y_{aj,\alpha}; \eta),$$

gdzie Q_{ij} jest dowolnym tensorem ortogonalnym właściwym.

T.5. Ogólne rozwiązanie równania (8.1) ma postać

$$(8.2) \quad \epsilon = \epsilon''(G_{\alpha\alpha}; K_{\alpha ab}; \eta),$$

gdzie

$$(8.3) \quad G_{\alpha\alpha} \equiv y_{ai}x_{i,\alpha}, \quad K_{\alpha ab} \equiv y_{ai}y_{bi,\alpha}$$

są tzw. miarami odkształcenia ośrodka włóknistego.

D o w ó d. Bez umniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że numeracja wektorów kierunkowych y_{ai} jest taka, że

$$(8.4) \quad \det y_{ai} = 1.$$

Zatem w równaniu (8.1) można położyć

$$(8.5) \quad Q_{ij} = \delta_{ia}y_{aj},$$

co nam daje

$$(8.6) \quad \epsilon = \epsilon(\delta_{ia}G_{\alpha\alpha}; \delta_{ia}; \delta_{ib}K_{\alpha ab}; \eta).$$

Ponieważ macierz jednostkowa δ_{ia} nie jest zmienną niezależną, zatem postać (8.6) jest równoważna postaci (8.2), co kończy dowód.

Zauważmy, że z równania (8.2) wynika

$$(8.7) \quad K_{[i]j]} = 0.$$

Równania równowagi (6.6) można zatem przedstawić w postaci

$$(8.8) \quad P_{\Delta}^{\alpha}{}_{;i}|_{\alpha} + f_i = 0, \quad M_{\Delta}^{\alpha}{}_{;ij}|_{\alpha} + P_{\Delta}^{\alpha}{}_{;i}x_{j,\alpha} + h_{ij} = 0.$$

Podstawiając równanie (8.2) do (6.5) otrzymujemy

$$(8.9) \quad P_{\Delta}^{\alpha}{}_{;i} = \frac{\partial \epsilon''}{\partial G_{\alpha\alpha}} y_{ai}, \quad M_{\Delta}^{\alpha}{}_{;ij} = \frac{\partial \epsilon''}{\partial K_{\alpha ab}} y_{ai} y_{bj}.$$

T.6. Z założeń o nieoddziaływaniu sąsiednich włókien (Z.3) i o materialnej obiektywności potencjału sprężystości (Z.5) wynika

$$(8.10) \quad \epsilon' = \epsilon'''(H_a; L_{ab}; \eta),$$

gdzie

$$(8.11) \quad H_a \equiv y_{ai} \partial x_i = t^{\alpha} G_{\alpha a}, \quad L_{ab} \equiv y_{ai} \partial y_{bi} = t^{\alpha} K_{\alpha ab}$$

są tzw. miarami odkształcenia rodziny włókien Δ .

D o w ó d. Zasada materialnej obiektywności żąda, aby postać (7.1) potencjału sprężystości, wynikająca z założenia nieoddziaływań sąsiednich włókien, była rozwiązaniem równania funkcyjnego

$$(8.12) \quad \epsilon'(\partial x_i; y_{ai}; \partial y_{ai}; \tilde{\partial} y_{ai}; \eta) = \epsilon'(Q_{ij} \partial x_j; Q_{ij} y_{ai}; Q_{ij} \partial y_{ai}; Q_{ij} \tilde{\partial} y_{aj}; \eta).$$

Dalsze rozumowanie analogiczne do zastosowanego przy dowodzeniu twierdzenia T.5 prowadzi nas do związku

$$(8.13) \quad \epsilon'_A = \epsilon'''_A(H_A; L_{ab}; y_{ai} \tilde{\partial} y_{bi}; \eta).$$

Korzystając ze związku (7.1)₂ można wykazać, że

$$(8.14) \quad \frac{\partial \epsilon'''_A}{\partial (y_{ai} \tilde{\partial} y_{bi})} = 0,$$

co kończy dowód.

Podstawiając równanie (8.10) do związków (7.8) otrzymujemy

$$(8.15) \quad \bar{P}_A = -\frac{\partial \epsilon'''_A}{\partial H_A} y_{ai}, \quad \bar{M}_{ij} = \frac{\partial \epsilon'''_A}{\partial L_{ab}} y_{ai} y_{bj}.$$

Dokonując operacji sumowania na równaniach (8.8), (8.9), (8.10) i (6.7) dostajemy kolejno: równania równowagi

$$(8.16) \quad P_{.i}^\alpha|_\alpha + f_i = 0, \quad M_{.ij}^\alpha|_\alpha + P_{.i}^\alpha x_{j,\alpha} + h_{ij} = 0,$$

równania konstytutywne

$$(8.17) \quad e = \sum_A \epsilon'''_A(H_A; L_{ab}; \eta),$$

$$P_{.i}^\alpha = \frac{\partial e}{\partial G_{\alpha a}} y_{ai}, \quad M_{.ij}^\alpha = \frac{\partial e}{\partial K_{\alpha ab}} y_{ai} y_{bj},$$

oraz warunki brzegowe

$$(8.18) \quad p_i = n_\alpha P_{.i}^\alpha, \quad m_{ij} = n_\alpha M_{.ij}^\alpha.$$

9. Opis dualny

Zauważmy, że wielkości m_{ij} , $M_{.ij}^\alpha$, $\bar{M}_{ij}$ są tensorami antysymetrycznymi względem wskaźników ij . Wielkości $K_{\alpha ab}$ i L_{ab} są antysymetryczne względem wskaźników ab . Każdą taką wielkość można jednoznacznie przedstawić za pomocą odpowiednich pseudowektorów lub pseudotensorów¹⁾. Takie przedstawienie będziemy nazywać reprezentacją dualną i wyróżniać za pomocą gwiazdki. Dla tensora naprężeń $M_{.ij}^\alpha$ mamy

$$(9.1) \quad M_{.ij}^\alpha = -\frac{1}{2} e_{ijk} \dot{M}_{.k}^\alpha, \quad \dot{M}_{.k}^\alpha = -M_{.ij}^\alpha e_{ijk},$$

gdzie $\dot{M}_{.k}^\alpha$ jest pseudotensorem naprężeń momentowych.

Wprowadzając do opisu reprezentacje dualne można otrzymać następującą postać równań statyki sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego: równania równowagi

$$(9.2) \quad P_{.i}^\alpha|_\alpha + f_i = 0, \quad \dot{M}_{.k}^\alpha|_\alpha - e_{ijk} P_{.i}^\alpha x_{j,\alpha} + \dot{h}_k = 0,$$

¹⁾ Pseudotensorem nazywamy tutaj gęstość tensorową Weyla o wadze zero (GOŁĄB [7]).

równania geometryczne

$$(9.3) \quad H_a = y_{ai} \partial_{\dot{A}} x_i = t_a^\alpha G_{\alpha a}, \quad \dot{L}_c = -e_{abc} y_{ai} \partial_{\dot{A}} y_{bi} = t_a^\alpha \dot{K}_{\alpha c},$$

równania konstytutywne

$$(9.4) \quad e = \sum_{\dot{A}} \epsilon^{\text{IV}}(\dot{H}_a; \dot{L}_a; \eta),$$

$$P_{\dot{A}}^\alpha = \frac{\partial e}{\partial G_{\alpha a}} y_{ai}, \quad \dot{M}_{\dot{A}}^\alpha = 2 \frac{\partial e}{\partial \dot{K}_{\alpha a}} y_{ak},$$

warunki brzegowe

$$(9.5) \quad p_i = n_\alpha P_{\dot{A}}^\alpha, \quad \dot{m}_k = n_\alpha \dot{M}_{\dot{A}}^\alpha.$$

Związki (8.13) przyjmują postać

$$(9.6) \quad \bar{P}_{\dot{A}} = \frac{\partial \epsilon^{\text{IV}}}{\partial \dot{H}_a} y_{ai}, \quad \dot{\bar{M}}_{\dot{A}} = 2 \frac{\partial \epsilon^{\text{IV}}}{\partial \dot{L}_a} y_{ak},$$

natomiast dla równań równowagi włókna $\dot{U}$ (7.10) mamy

$$(9.7) \quad \partial_{\dot{A}}(\lambda \bar{P}_{\dot{A}}) + \lambda \dot{f}_i = 0, \quad \partial_{\dot{A}}(\lambda \dot{\bar{M}}_{\dot{A}}) - \lambda e_{ijk} \bar{P}_{\dot{A}} \partial_{\dot{A}} x_j + \lambda \dot{h}_k = 0.$$

10. Teoria liniowa

W przypadku małych obrotów cząstek ośrodka możemy równania (3.1) i (3.2) przedstawić w postaci

$$(10.1) \quad x_i(\eta, t) = X_i(\eta) + u_i(\eta, t), \quad y_{ai}(\eta, t) = Y_{aj}(\eta) [\delta_{ij} - e_{ijk} v_k(\eta, t)]$$

gdzie u_i jest polem wektora przemieszczenia, natomiast v_i jest polem pseudowektora małego obrotu. Proces linearyzacji równań (9.2)–(9.7) przeprowadzimy w oparciu o założenie

$$(10.2) \quad |u_{i,(\alpha)}| \ll 1, \quad |v_{ij}| \ll 1.$$

Odpowiednie równania teorii liniowej mają następującą postać: równania równowagi

$$(10.3) \quad P_{\dot{A}}^\alpha|_\alpha + f_i = 0, \quad \dot{M}_{\dot{A}}^\alpha|_\alpha - e_{ijk} P_{\dot{A}}^\alpha X_{j,\alpha} + \dot{h}_k = 0;$$

równania konstytutywne

$$(10.4) \quad e = \sum_{\dot{A}} \epsilon^{\text{V}}(t_a^\alpha \gamma_{\alpha i}; t_a^\alpha \kappa_{\alpha i}; \eta) = \sum_{\dot{A}} t_a^\alpha t_b^\beta \left(\frac{1}{2} R_{ij} \gamma_{\alpha i} \gamma_{\beta j} + Q_{ij} \gamma_{\alpha i} \kappa_{\beta j} + \frac{1}{2} S_{ij} \kappa_{\alpha i} \kappa_{\beta j} \right),$$

$$P_{\dot{A}}^\alpha = \frac{\partial e}{\partial \gamma_{\alpha i}} = \sum_{\dot{A}} t_a^\alpha t_b^\beta (R_{ij} \gamma_{\beta j} + Q_{ij} \kappa_{\beta j}),$$

$$\dot{M}_{\dot{A}}^\alpha = \frac{\partial e}{\partial \kappa_{\alpha i}} = \sum_{\dot{A}} t_a^\alpha t_b^\beta (Q_{ji} \gamma_{\beta j} + S_{ij} \kappa_{\beta j});$$

równania geometryczne

$$(10.5) \quad \gamma_{\alpha i} = u_{i,\alpha} + e_{ijk} v_k X_{j,\alpha}, \quad \kappa_{\alpha i} = v_{i,\alpha};$$

warunki brzegowe

$$(10.6) \quad p_i = n_\alpha P_i^\alpha, \quad \dot{m}_i = n_\alpha \dot{M}_{i,\alpha},$$

w której tensory R_{ij} , Q_{ij} , S_{ij} są miarami sztywności rodziny włókien Δ .

Zachodzą również związki

$$(10.6) \quad \dot{K}_{\alpha c} \cong -e_{abc} Y_{ai} Y_{bi,\alpha} + 2Y_{ci} v_{i,\alpha}, \quad G_{\alpha\alpha} \cong Y_{ai} X_{i,\alpha} + Y_{ai} \gamma_{\alpha i}$$

oraz odwrotne do nich

$$(10.7) \quad \begin{aligned} \kappa_{\alpha i} &\cong \frac{1}{2} \dot{K}_{\alpha\alpha} Y_{ai} - \frac{1}{2} e_{ijk} Y_{aj} Y_{ik,\alpha}, \\ \gamma_{\alpha i} &\cong G_{\alpha\alpha} Y_{ai} - X_{i,\alpha}. \end{aligned}$$

Zlinearyzowane równania (9.6) przyjmują postać

$$(10.8) \quad \begin{aligned} \bar{P}_i &= \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial (t^\alpha \gamma_{\alpha i})} = R_{ij} t^\beta \gamma_{\beta j} + Q_{ij} t^\beta \kappa_{\beta j}, \\ \dot{\bar{M}}_i &= \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial (t^\alpha \kappa_{\alpha i})} = Q_{ji} t^\beta \gamma_{\beta j} + S_{ij} t^\beta \kappa_{\beta j}, \end{aligned}$$

natomiast dla zlinearyzowanych równań równowagi włókna Δ otrzymujemy

$$(10.9) \quad \partial(\lambda \bar{P}_i) + \lambda f_i = 0, \quad \partial(\lambda \dot{\bar{M}}_i) - e_{ijk} \lambda \bar{P}_j \partial X_j + \lambda \dot{h}_i = 0.$$

Równania (10.3)–(10.5) stanowią podstawowy układ równań liniowej teorii sprężystego powierzchniowego ośrodka włóknistego. Jest to układ równań różniczkowych liniowych dwunastego rzędu. Znając rozwiązanie układu równań (10.3)–(10.5) spełniające odpowiednie warunki brzegowe [np. naprężeniowe warunki brzegowe (10.6)] można za pomocą wzorów (10.8) ustalić napięcia w poszczególnych włóknach ośrodka. Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań tego układu równań zostało udowodnione w pracy autora [1].

11. Ośrodek włóknisty jako model powierzchniowego dźwigara rusztowego

Powierzchniowym dźwigarem rusztowym nazywać będziemy tutaj układ prętowy o sztywnych węzłach spełniających następujące założenia:

Z.7. Osie wszystkich prętów leżą na odpowiednio regularnej powierzchni S zwanej dalej powierzchnią środkową.

Z.8. Siatka dyskretna utworzona z osi prętów, zawarta w każdym płacie prostym będącym częścią powierzchni S daje się odwzorować topologicznie na siatkę

$$(11.1) \quad \operatorname{Re}[(x+iy)\exp(-i\varphi)] = n\varepsilon, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$(\varepsilon = \text{const}), \quad \left(\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \Delta \right), \quad (\Delta = 1, 2)$$

lub na siatkę

$$(11.2) \quad \operatorname{Re}[x+iy]\exp(-\varphi) = n\varepsilon, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$(\varepsilon = \text{const}), \quad \left(\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi}{3}\Delta \right), \quad (\Delta = 1, 2, 3).$$

W wymienionych wyżej dwóch przypadkach będziemy mówili, że ruszt składa się z dwóch lub trzech rodzin prętów. Odległość między osiami sąsiednich prętów danej rodziny oznaczmy literą $\tilde{l}_\Delta$ natomiast długość odcinka pręta wyznaczonego dwoma kolejnymi węzłami oznaczmy literą l_Δ .

Z.9. Ruszt jest gęsty, tzn. wymiary l_Δ i $\tilde{l}_\Delta$ są znacznie mniejsze zarówno od wymiarów charakteryzujących krzywiznę poszczególnych włókien jak i od wymiarów globalnych powierzchni S.

Założenie powyższe pozwala nam traktować pręty rusztu jako w przybliżeniu — prostoliniowe.

Z.10. Każdy z prętów znajduje się w stanie równowagi statecznej.

Z.11. Zmiany charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych prętów rusztu są pomijalnie małe.

Z.12. Pręty rusztu są na tyle smukłe, aby można było stosować wzory wytrzymałości materiałów.

Założenia Z.7–Z.12 pozwalają nam rozpatrywać poszczególne pręty rusztu jako pręty przyrząteczne. Korzystając ze wzorów wytrzymałości materiałów słusznych dla prętów przyrzątecznych, obciążonych jedynie na swych końcach, nietrudno udowodnić następujące spostrzeżenia:

S.1. Wartości sił i momentów przekrojowych występujących w połowie rozpiętości pręta są równe średnim dla danego pręta wartościom sił i momentów przekrojowych.

Wartości średnich sił i momentów przekrojowych będziemy oznaczać literami π_Δ i μ_Δ .

S.2. Wartości średnich sił π_Δ i momentów przekrojowych μ_Δ wyznaczają jednoznacznie stan naprężenia danego pręta.

S.3. Przemieszczenia końców pręta U' i U'' oraz ich obroty V' i V'' wyznaczają stan naprężenia pręta, a w szczególności średnie wartości sił i momentów przekrojowych oraz średnią wartość energii sprężystej. W układzie odniesienia D_α ($\alpha = \text{I, II, III}$) wyznaczonym wektorem stycznym t_Δ oraz głównymi centralnymi kierunkami bezwładności przekroju pręta rodziny Δ , odpowiednie związki mają postać

$$(11.3) \quad \pi_{\text{I}} = E F_\Delta \frac{U''_{\text{I}} - U'_{\text{I}}}{l_\Delta}, \quad \pi_{\text{II}} = -\frac{12 E J_{\Delta\Delta\text{III}}}{l_\Delta^2} \left(\frac{U''_{\text{II}} - U'_{\text{II}}}{l_\Delta} - \frac{V''_{\text{III}} + V'_{\text{III}}}{2} \right),$$

$$\pi_{\text{III}} = -\frac{12 E J_{\Delta\Delta\text{II}}}{l_\Delta^2} \left(\frac{U''_{\text{III}} - U'_{\text{III}}}{l_\Delta} + \frac{V''_{\text{II}} + V'_{\text{II}}}{2} \right),$$

$$\mu_{\text{I}} = G J_{\Delta\text{I}} \frac{V''_{\text{I}} - V'_{\text{I}}}{l_\Delta}, \quad \mu_{\text{II}} = E J_{\Delta\text{II}} \frac{V''_{\text{II}} - V'_{\text{II}}}{l_\Delta},$$

$$\begin{aligned} \mu_{III} &= \frac{EJ_{III}}{\Delta} \frac{V_{III}'' - V_{III}'}{l}, \\ E_{\Delta sr} &= \frac{1}{2} \left[EF \left(\frac{U_1'' - U_1'}{l} \right)^2 + \frac{12EJ_{III}}{\Delta l^2} \left(\frac{U_{II}'' - U_{II}'}{l} - \frac{V_{III}'' + V_{III}'}{2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12EJ_{II}}{\Delta l^2} \left(\frac{U_{III}'' - U_{III}'}{l} + \frac{V_{II}'' + V_{II}'}{2} \right)^2 + GJ_I \left(\frac{V_I'' - V_I'}{l} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + EJ_{II} \left(\frac{V_{II}'' - V_{II}'}{\Delta} \right)^2 + EJ_{III} \left(\frac{V_{III}'' - V_{III}'}{\Delta} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

w której E i G są modułami Yunga i sztywności postaciowej, G_{Δ}, J_{Δ} jest sztywnością skrętną, J_{II} i J_{III} są głównymi centralnymi momentami bezwładności przekroju pręta.

Równania (11.3) można zapisać w bardziej zwartej postaci

$$\begin{aligned} (11.4) \quad E_{\Delta sr} &= \frac{1}{2\Delta} \mathcal{R}_{ab} \mathcal{G}_a \mathcal{G}_b + \frac{1}{2} \mathcal{S}_{ab} \mathcal{K}_a \mathcal{K}_b, \\ \pi_a &= \frac{\partial E_{\Delta sr}}{\partial \mathcal{G}_a} = \mathcal{R}_{ab} \mathcal{G}_b, \quad \mu_a = \frac{\partial E_{\Delta sr}}{\partial \mathcal{K}_a} = \mathcal{S}_{ab} \mathcal{K}_b, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} (11.5) \quad \mathcal{R}_{ab} &\equiv \begin{vmatrix} \frac{EF}{\Delta}, & 0, & 0, \\ 0, & \frac{12EJ_{III}}{\Delta l^2}, & 0, \\ 0, & 0, & \frac{12EJ_{II}}{\Delta l^2} \end{vmatrix}, \\ \mathcal{S}_{ab} &\equiv \begin{vmatrix} \frac{GJ_I}{\Delta}, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{EJ_{II}}{\Delta}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{EJ_{III}}{\Delta} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

są macierzami sztywności pręta rodziny Δ , natomiast

$$(11.6) \quad \mathcal{G}_a \equiv \frac{U_a'' - U_a'}{l} + e_{arb} \frac{V_b'' + V_b'}{2}, \quad \mathcal{K}_a \equiv \frac{V_a'' - V_a'}{\Delta}$$

są miarami globalnego odkształcenia pręta rodziny Δ .

Uogólniając spostrzeżenie S.3 na przypadek prętów niepryzmatycznych otrzymujemy następujące twierdzenie:

T.7. Wartości średnich sił i momentów przekrojowych są odpowiednimi pochodnymi średniej energii sprężystej, tj.

$$\begin{aligned} (11.7) \quad E_{\Delta sr} &= \frac{1}{2} \mathcal{R}_{ij} \mathcal{G}_i \mathcal{G}_j + \mathcal{Q}_{ij} \mathcal{G}_i \mathcal{K}_j + \frac{1}{2} \mathcal{S}_{ij} \mathcal{K}_i \mathcal{K}_j, \\ \pi_i &= \frac{\partial E_{\Delta sr}}{\partial \mathcal{G}_i} = \mathcal{R}_{ij} \mathcal{G}_j + \mathcal{Q}_{ij} \mathcal{K}_j, \end{aligned}$$

$$\mu_i = \frac{\partial E_{st}}{\partial \mathcal{K}_i} = \mathcal{Q}_{ji} \mathcal{G}_j + \mathcal{S}_{ij} \mathcal{K}_j.$$

D o w ó d. Z założenia Z.10 wynika, że globalna deformacja pręta dana wektorami

$$(11.8) \quad \mathcal{G}_i \equiv \frac{U_i'' - U_i'}{l} + e_{ijk} \tilde{l}_j \frac{V_k'' + V_k'}{2}, \quad \mathcal{K}_i \equiv \frac{V_i'' - V_i'}{l},$$

gdzie l jest odległością końców pręta, a $\tilde{l}_i$ jest jednostkowym wektorem wyznaczającym kierunek prostej łączącej końce pręta, jednoznacznie określa wartości sił i momentów przekrojowych na końcach pręta. A zatem zachodzi

$$(11.9) \quad \begin{aligned} \pi_i'' &= \mathcal{R}_{ij}'' \mathcal{G}_j + \mathcal{Q}_{ij}' \mathcal{K}_j, & \pi_i' &= \mathcal{R}_{ij}' \mathcal{G}_j + \mathcal{Q}_{ij} \mathcal{K}_j, \\ \mu_i'' &= \hat{\mathcal{Q}}_{ij}'' \mathcal{G}_j + \mathcal{S}_{ij}'' \mathcal{K}_j, & \mu_i' &= \hat{\mathcal{Q}}_{ij}' \mathcal{G}_j + \mathcal{S}_{ij}' \mathcal{K}_j, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{R}_A'', \mathcal{R}_A', \mathcal{Q}_A'', \mathcal{Q}_A', \hat{\mathcal{Q}}_A'', \hat{\mathcal{Q}}_A', \mathcal{S}_A'', \mathcal{S}_A'$ są macierzami sztywności pręta. Związki (11.9) są wzorami transformacyjnymi znanymi z mechaniki budowli. Z warunków równowagi rozpatrywanego pręta

$$(11.10) \quad \pi_i'' - \pi_i' = 0, \quad \mu_i'' - \mu_i' + e_{ijk} (X_j'' \pi_k'' - X_j' \pi_k') = 0$$

wynika, że wzory transformacyjne (11.9) można przedstawić w postaci

$$(11.11) \quad \begin{aligned} \pi_i'' &= \pi_i' = \mathcal{R}_{ij} \mathcal{G}_j + \mathcal{Q}_{ij} \mathcal{K}_j, \\ \mu_i'' &= \left(\mathcal{Q}_{ij} - \frac{1}{2} l e_{ikl} \tilde{l}_k \mathcal{R}_{lj} \right) \mathcal{G}_j + \left(\mathcal{S}_{ij} - \frac{1}{2} l e_{ikl} \tilde{l}_k \mathcal{Q}_{lj} \right) \mathcal{K}_j, \\ \mu_i' &= \left(\hat{\mathcal{Q}}_{ij} + \frac{1}{2} l e_{ikl} \tilde{l}_k \mathcal{R}_{lj} \right) \mathcal{G}_j + \left(\mathcal{S}_{ij} + \frac{1}{2} l e_{ikl} \tilde{l}_k \mathcal{Q}_{lj} \right) \mathcal{K}_j, \end{aligned}$$

gdzie oznaczono

$$(11.12) \quad \mathcal{R}_A \equiv \mathcal{R}_A'' = \mathcal{R}_A', \mathcal{Q}_A \equiv \mathcal{Q}_A'' = \mathcal{Q}_A', \hat{\mathcal{Q}}_A = \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{Q}}_A'' + \hat{\mathcal{Q}}_A'), \mathcal{S}_A = \frac{1}{2} (\mathcal{S}_A'' + \mathcal{S}_A').$$

Z twierdzenia Rayleigha o wzajemności reakcji wynika

$$(11.13) \quad \mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_{ji}, \quad \mathcal{Q}_{ij} = \mathcal{Q}_{ji}, \quad \mathcal{S}_{ij} = \mathcal{S}_{ji}.$$

Zasada zachowania energii dla pręta daje nam

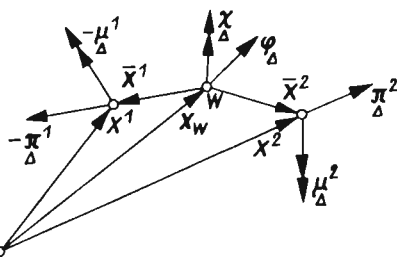
$$(11.14) \quad \begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (\pi_i'' U_i'' - \pi_i' U_i' + \mu_i'' V_i'' - \mu_i' V_i') = \\ &= l \left(\frac{1}{2} \mathcal{R}_{ij} \mathcal{G}_i \mathcal{G}_j + \mathcal{Q}_{ij} \mathcal{G}_i \mathcal{K}_j + \frac{1}{2} \mathcal{S}_{ij} \mathcal{K}_i \mathcal{K}_j \right). \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony równania (11.14) przez rozpiętość pręta l_{Δ} otrzymujemy związek (11.7). Aby wskazać pozostałe dwa wystarczy sprawdzić, że zachodzą o ile przyjmujemy

$$(11.15) \quad \pi_i = \frac{1}{2}(\pi_i'' + \pi_i'), \quad \mu_i = \frac{1}{2}(\mu_i'' + \mu_i').$$

Nietrudno zauważyć, że średnia wartość momentu przekrojowego jest momentem przekrojowym występującym w przekroju płaszczyzną symetrii odcinka o współrzędnych (X_i'') i (X_i') , liczonym względem śladu tego odcinka na tej płaszczyźnie. Wektory π_i i μ_i są zatem zaczepione w punkcie o współrzędnych $\frac{1}{2}(X_i'' + X_i')$.

Rozpatrzmy równowagę dwóch prętów danej rodziny spotykających się w węźle W (rys. 3). Jeżeli przyjmujemy, że obciążenie przypadające na węzeł W dane jest za pomocą



Rys. 3

wektora siły φ_{Δ} i wektora momentu X_{Δ} to warunki równowagi tych prętów można zapisać w postaci

$$(11.16) \quad \pi_{\Delta}^2 - \pi_{\Delta}^1 + \varphi = 0$$

$$2(\mu_{\Delta}^2 - \mu_{\Delta}^1) + (X^2 - X^1) \times (\pi_{\Delta}^2 + \pi_{\Delta}^1) + (\bar{X}^2 + \bar{X}^1) \times (\pi_{\Delta}^2 - \pi_{\Delta}^1) + 2X = 0,$$

gdzie π^2 , π^1 , μ^2 , μ^1 są średnimi wartościami sił i momentów przekrojowych w tych prętach, X^2 i X^1 są współrzędnymi punktów zaczepienia tych sił, natomiast $\bar{X}^2$ i $\bar{X}^1$ są równe

$$(11.17) \quad \bar{X}^2 = X^2 - X_w, \quad \bar{X}^1 = X^1 - X_w,$$

gdzie X_w są współrzędnymi węzła W . Zauważmy, że zachodzą nierówności

$$(11.18) \quad |\bar{X}^2 + \bar{X}^1| \ll |X^2 - X^1|, \quad |\pi^1 - \pi^2| \ll |\pi^1 + \pi^2|.$$

Nietrudno zauważyć, że powierzchniowy ośrodek włóknisty wykazuje pewne podobieństwa do powierzchniowego dźwigara rusztowego omówionego w niniejszym rozdziale. Polom opisującym ośrodek włóknisty odpowiadają dyskretne zbiory liczb podobnej natury geometrycznej opisujące dźwigar rusztowy. Równaniom różniczkowym ośrodka włóknistego odpowiadają równania różnicowe dźwigara rusztowego. Wyróżnimy następujące zasadnicze podobieństwa ośrodka włóknistego i dźwigara rusztowego:

A.1. Podobieństwo geometryczne:

1° Wewnętrznej strukturze powierzchniowego ośrodka włóknistego odpowiada struktura powierzchniowego dźwigara rusztowego.

2° Polom wektora przemieszczenia u_i i wektora małego obrotu v_i cząstek ośrodka włóknistego odpowiadają zbiory przemieszczeń U_i i obrotów V_i węzłów dźwigara rusztowego.

Wobec powyższego porównanie związków geometrycznych (10.5) i (11.8) wskazuje że:

3° Miarom małego odkształcenia ośrodka włóknistego $l_{\Delta}^{\alpha} \gamma_{\alpha i}$ i $l_{\Delta}^{\alpha} \kappa_{\alpha i}$ odpowiadają miary globalnego odkształcenia prętów dźwigara rusztowego $\mathcal{G}_i$ i $\mathcal{K}_i$.

A.2. Podobieństwo statyczne:

1° Zarówno sąsiednie włókna ośrodka włóknistego jak i sąsiednie pręty dźwigara rusztowego nie oddziałują na siebie bezpośrednio.

2° Stan naprężenia włókien oraz prętów opisujemy przy pomocy wektorów sił i momentów. Analogia ilościowa ma postać

$$(11.19) \quad \tilde{l}_{\Delta\Delta} \bar{P}_i - \pi_i, \quad \tilde{l}_{\Delta\Delta}^* \bar{M}_i - \mu_i.$$

3° Obciążenie ośrodka włóknistego oraz dźwigara rusztowego opisujemy przy pomocy wektorów sił i momentów zewnętrznych. Analogia ilościowa ma postać

$$(11.20) \quad \tilde{l}_{\Delta\Delta} f_i - l_{\Delta}^{-1} \varphi_i, \quad \tilde{l}_{\Delta\Delta} h_i - l_{\Delta}^{-1} \chi_i.$$

4° Równania równowagi ośrodka włóknistego (10.9) są podobne do równań równowagi dźwigara rusztowego (11.16).

A.3. Podobieństwo fizyczne:

1° Jeżeli węzły rusztu są sztywne to można — podobnie jak w ośrodku włóknistym — stwierdzić jaka część energii wewnętrznej przypada na poszczególną rodzinę prętów.

2° Równania fizyczne (10.4) i (10.8) są podobne do równań (11.7).

Analogie ilościowe mają postać

$$(11.21) \quad \tilde{l}_{\Delta\Delta} e - E_{sr}, \quad \tilde{l}_{\Delta\Delta} R_{ij} - \mathcal{R}_{ij},$$

$$\tilde{l}_{\Delta\Delta} Q_{ij} - \mathcal{Q}_{ij}, \quad \tilde{l}_{\Delta\Delta} S_{ij} - \mathcal{S}_{ij}.$$

Podobieństwa A.1–A.3 wskazują na to, że powierzchniowy ośrodek włóknisty jest pewnym ciągłym modelem powierzchniowego dźwigara rusztowego. Niemniej otwartym problemem pozostaje określenie warunków, w których podobieństwo wykazują rozwiązania równań ośrodka włóknistego z rozwiązaniami równań dźwigara rusztowego. Dla płaskich zagadnień kołowo symetrycznych problem ten był rozpatrywany w pracy KONIECZNEGO [11]. Ogólnie można powiedzieć, że podobieństwo rozwiązań zachodzi, o ile obroty i przemieszczenia sąsiednich węzłów rusztu różnią się nieznacznie.

Literatura cytowana w tekście

1. W. BARAŃSKI, *Powierzchniowe ośrodki włókniste i ich zastosowanie*, Rozprawa doktorska, Łódź 1967.
2. W. BARAŃSKI, K. WILMAŃSKI, Cz. WOŹNIAK, *Mechanika ośrodków ciągłych typu Cosserat*, Mech. Teor. Stos., 2, 5 (1967).

3. H. COHEN, C. DE SILVA, *Nonlinear theory of elastic directed surfaces*, J. Math. Phys., **7** (1966), 960–967.
4. E. i F. COSSERAT, *Theorie des corps deformables*, Paris 1909.
5. J. ERICKSEN, C. TRUESDELL, *Exact theory of stress and strain in rods and shells*, Arch. Rat. Mech. Anal., **1** (1958), 295–323.
6. A. GOETZ, *Geometria różniczkowa*, Warszawa 1965.
7. S. GOŁĄB, *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1966.
8. A. GREEN, P. NAGHDI, W. WAINRIGHT, *A general theory of Cosserat surface*, Arch. Rat. Mech. Anal., **20** (1965), 287–308.
9. A. GREEN, R. RIVLIN, *Simple force and stress multipoles*, Arch. Rat. Mech. Anal., **16** (1964), 325–353.
10. A. GREEN, R. RIVLIN, *Multipolar continuum mechanics*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17** (1964), 113–147.
11. S. KONIECZNY, *O zastosowaniu teorii ośrodków włóknistych do obliczania rusztów pierścieniowych*, Arch. Inż. Łąd., **1**, **13** (1967).
12. R. TOUPIN, *Elastic materials with couple-stresses*, Arch. Rat. Mech. Anal., **11** (1962), 385–414.
13. R. TOUPIN, *Theories of elasticity with couple-stresses*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17** (1964), 85–112.
14. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *The clasical field theories*, Handbuch der Physik, III/1, Berlin–Heidelberg–New York 1960.
15. Cz. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media (I)*, Arch. Mech. Stos., **17** (1965), 651–669.
16. Cz. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media (II)*, Arch. Mech. Stos., **17** (1965), 777–799.
17. S. ZAHORSKI, *On motion and thermodynamics of non-simple continua with microstructure*, Arch. Mech. Stos., **1**, **19** (1967).

Р е з ю м е

СТАТИКА ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛОКНИСТОЙ СРЕДЫ

В работе рассматривается статическая теория поверхностной волокнистой среды состоящей из N семейств волокон. Теория построена с помощью основных законов механики сплошной среды, закона невосдействия соседних волокон и предположении об аддитивности механических величин, по отношению к отдельным волокнам. Рассмотрено также подобие поверхностной волокнистой среды и поверхностной решетчатой оболочки.

S u m m a r y

STATICS OF SURFACE FIBROUS MEDIA

This paper is concerned with the statical theory of surface media composed of N families of fibres. The theory is developed using fundamental laws of continuum mechanics and the principle of nonreaction of neighbouring fibres together with additivity requirement of mechanical quantities with respect to the particular families of fibres. The problem of analogies between surface fibrous media and surface grate systems is also considered.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 listopada 1968 r.